- **根据第三章的讨论，虽然模型参数的真实值（如β_1，β_2）未知，但我们获得的OLS估计值（如$\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$）包含了真实值的一些信息**
- **在第四章中，我们希望利用这些信息（以及新的假设），对真实值进行统计推断，得到类似这样的结论：**
  - 我们“有很大的把握”认为β_1不等于零（ X_1 对Y 有“单独”的影响）
  - ·　·　·　·　　　　　β_1的取值范围是[0.2, 0.5]
  - ·　·　·　·　　　　　β_1，　β_2不都是零（ X_1，X_2一起对Y有解释作用）
- **回归模型中的统计推断**
  - 对总体参数的假设检验 (Hypothesis Tests)
  - 构建置信区间 (Confidence Interval)

JEFFREY M. WOOLDRIDGE

Introductory
Econometrics
A Modern Approach

SIXTH EDITION

Chapter 4

多元回归分析：推断

章节框架

- 首先，在总体误差服从正态分布的新假设下，我们讨论OLS估计值的分布
- 之后，我们分别讨论对单个参数的假设检验与置信区间的构造
- 最后，我们讨论设计多个参数的假设检验：检验关于包含多个参数的一个线性约束与多个线性约束

OLS估计量的抽样分布

- **OLS估计量的抽样分布**
  - OLS估计量是随机变量
  - 我们已经知道其期望值和方差
  - 然而，对于假设检验来说，我们需要知道估计量的分布
  - 为了刻画其分布，我们需要更多的假定
  - 对于误差项分布的假定：正态分布

OLS估计量的抽样分布

对n没有要求，

小样本性质

有限

- **假定 MLR.6 （正态性）**

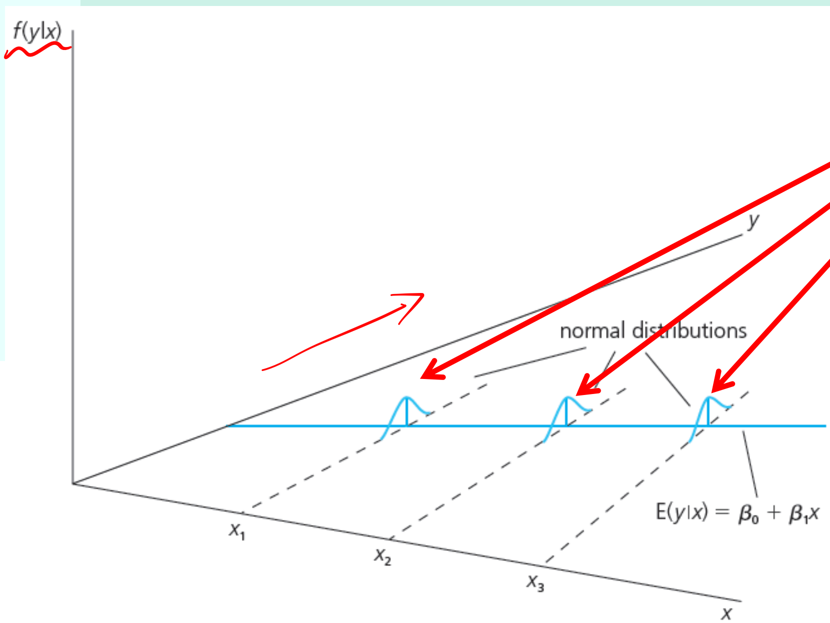
$Var(u|x)=\sigma^2 I_n$

非常强，

$$u_i \sim \boxed{\text{Normal}}(\underbrace{0}_{E[u_i]=0}, \sigma^2) \text{ 独立于 } x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$$

$n \to \infty$

渐近 Central Limit Theorem



假设不可见因素围绕着总体回归方程服从正态分布

分布的形式不依赖与任何解释变量

这意味着：

$$y|\mathrm{x} \sim \text{Normal}(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k, \sigma^2)$$

$y = x\beta + u$

OLS估计量的抽样分布

- **对正态性假定的讨论**
  - 正态性不成立的例子：
    - 工资（非负；存在最低工资）
    - 逮捕的次数（采用少量正整数值）
    - 失业（虚拟变量，取1或0）
  - 在许多情况下，正态性可以通过转换因变量来获得（例如：使用log（wage）而不是wage）
  - 在正态性下，OLS是最优无偏估计（即使考虑非线性估计量）
  - 重要：出于统计推断的目的，正态性假设可以被大样本所替代（渐进性，第五章）

log

"MLE"

最大似然估计

Greene, Hayashi. (2000)

MLR.1–5, + MLR.6 Best Unbiased Estimator

Gauss–Markov: MLR.1–5. OLS → BLUE.

Cramer–Rao "Lower Bound" 下界 无偏 $\hat{\sigma}^2 \geq$ CRLB

$\hat{\sigma}$ – CRLB 半正定 p.s.d.

OLS估计量的抽样分布

- **术语：**

$$\underbrace{MLR.1 - MLR.5}$$

"高斯-马尔科夫假定"

$$\underbrace{MLR.1 - MLR.6}$$

"经典线性模型（CLM）假定"

- **定理4.1 （正太抽样分布）**

$\hat{\beta}_j = \beta_j + (\sum \tilde{r}_{ij}^2)^{-1}(\sum \tilde{r}_{ij} u_i)$

在CLM假定MLR.1 – MLR.6下：

$\hat{\beta}_j \sim Normal(\beta_j, Var(\hat{\beta}_j))$

$$\hat{\beta}_j \sim \text{Normal}(\beta_j, \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)})$$

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{sd(\hat{\beta}_j)} \sim \text{Normal}(0, 1)$$

σ^2

估计量围绕着真实值，并以其方差来服从正态分布

标准化估计量服从标准正态分布

$\hat{\sigma}^2$

注意： $sd(\hat{\beta}_j)$是未知的

OLS估计量的抽样分布

- **替换成**

$$se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j)} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 / \left[SST_j(1 - R_j^2)\right]}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2\right) / \left[n - k - 1\right]$$

$\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k-1}$

- **定理4.2 标准化估计量的t分布**

P632，定理 E.6

$t = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$　　$Z \sim Normal$　　$X \sim \chi^2(n)$

在假定MLR.1-MLR.6下：

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

$\beta_j \overset{?}{=} 0$

如果使用估计量的标准偏差（=标准误差）进行标准化，则正态分布将被替换为t分布

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / SST_j(1-R_j^2)}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2/\bigcirc}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$$

注：如果n-k-1较大，t分布接近标准正态分布。

$\beta_j > 0$?　　$\beta_j < 0$

分子分母独立，

分子：$\hat{\beta}_j$． 分母：$\hat{u}$ 只需证 $\hat{\beta}_j$ 和 $\hat{u}$ 不相关，

$$\mathrm{cov}(\hat{\beta}_j, \hat{u}) = 0.$$

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **原假设（Null hypothesis）**

$$H_0: \ \beta_j = 0$$

总体参数等于零，即在控制其他自变量后，x_j对y没有影响

- **备择假设（Alternative hypothesis）**

双侧备择假设： $H_1: \beta_j \neq 0$

单侧备择假设： $H_1: \beta_j > 0$

$H_1: \beta_j < 0$

Bootstrap.

- **原假设下**

$$\boxed{\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim \boxed{t_{n-k-1}}}$$

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **t统计量（或t比率）**

$\boxed{\beta_j = 0}$

$\hat{\beta}_j = 100000000$

t统计量用于检验上述零假设。估计系数离零越远，零假设成立的可能性越小。但“远离”零意味着什么？

0.0000001

$$t_{\hat{\beta}_j} \equiv \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)}$$

scaling

这取决于估计系数的可变性，即其标准偏差。<u>t统计量测量了估计系数远离零的程度是估计量标准差的多少倍。</u>

Sharpe. $\boxed{\frac{\bar{r}}{\sigma}}$

$\beta_j = 5$

- **如果原假设为真，t统计量服从t分布**

$\beta_j \neq 0$, $\hat{\beta}_j$ 分布？

注意：如果原假设不成立呢？

t分布，均值变了，

第I类，II类错误

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **目标：**定义一个拒绝规则（rejection rule），使得：如果原假设（ H0 ）为真，则H0被拒绝的可能性非常小（显著性水平significance level，例如5%）

Ronald Fisher

- 类似的，定义一个拒绝域（rejection region）,使得：如果原假设（ H0 ）为真， t统计量落入拒绝域的可能性非常小（显著性水平，例如5%）
- 根据备择假设（alternative hypothesis）的不同，构造的拒绝域方式也会不同

不是一成不变.

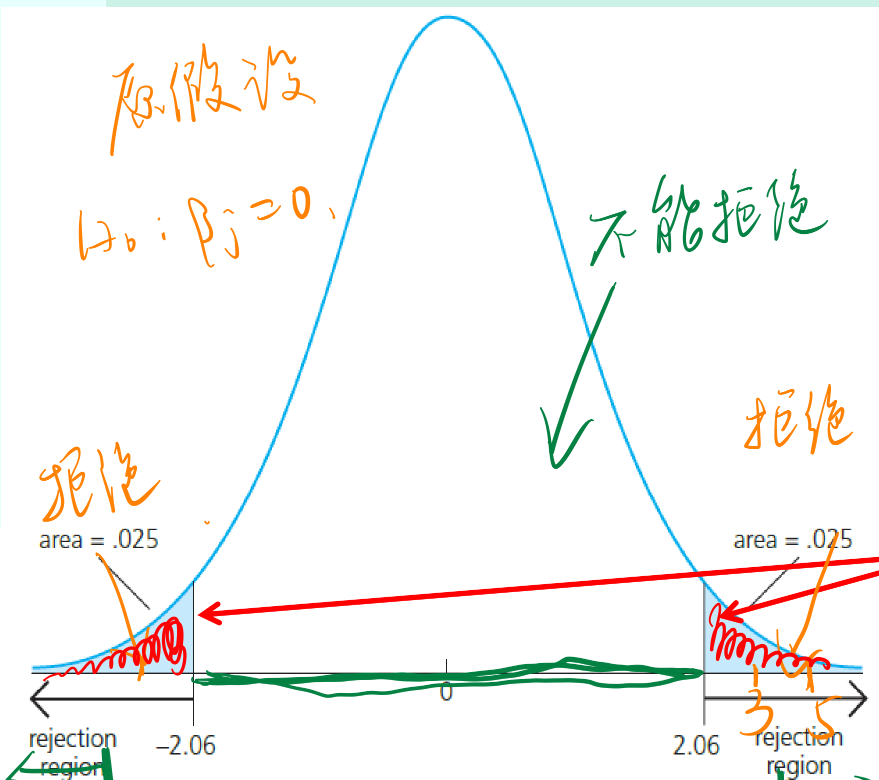
检验对单个总体参数的假设：t检验

$\beta_j = 0$

- **双侧备择假设**

两面积：5%，单边2.5%

$\frac{1.5-0.7}{1.4}$



Test $H_0 : \beta_j = 0$ against $H_1 : \beta_j \neq 0$.

如果估计系数的绝对值“太大”（即大于临界值），则拒绝原假设，支持备择假设。

构造临界值（critical value），使得在原假设为真的情况下，它在显著性水平5%（例如）的情况下被拒绝。

在给定的示例中，这两块蓝色区域面积之和为5%

如果t统计量的绝对值大于2.06，则拒绝原假设

显著性水平减小，拒绝域会变小

我们一般都是双侧检验，因为影响效应可正可负

4%，1%

more significant.

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **回归中的“统计显著”变量** n→∞ $\boxed{30}$
  - 如果一个回归系数在双侧检验中异于0，我们说这个变量是“统计显著的” n-k-1, ≈120
  - **如果自由度足够大**，标准正态分布近似成立，应用如下经验法则： Rule of Thumb.

t value

$|t\ ratio| > 1.645$ → “statistically significant at 10% level” *

$|t\ ratio| > 1.96$ → “statistically significant at 5% level” **

$|t\ ratio| > 2.576$ → “statistically significant at 1% level” ***

*

**

0.5

***

注意：通常情况下（自由度不足够大），临界值应根据 *t* 分布选择

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：大学GPA的决定因素**

每周缺课次数

$$\widehat{colGPA} = \underset{(.33)}{1.39} + \underset{(.094)}{.412}\ hsGPA + \underset{(.011)}{.015}\ ACT \boxed{-\ \underset{(.026)}{.083}}\ skipped$$

标准误差

$$n = 141,\ R^2 = .234$$

$$\frac{-0.083}{0.026}$$

对于关键值，使用标准正态分布

$$t_{hsGPA} = 4.38 > c_{0.01} = 2.58$$

$$t_{ACT} = 1.36 < c_{0.10} = 1.645$$

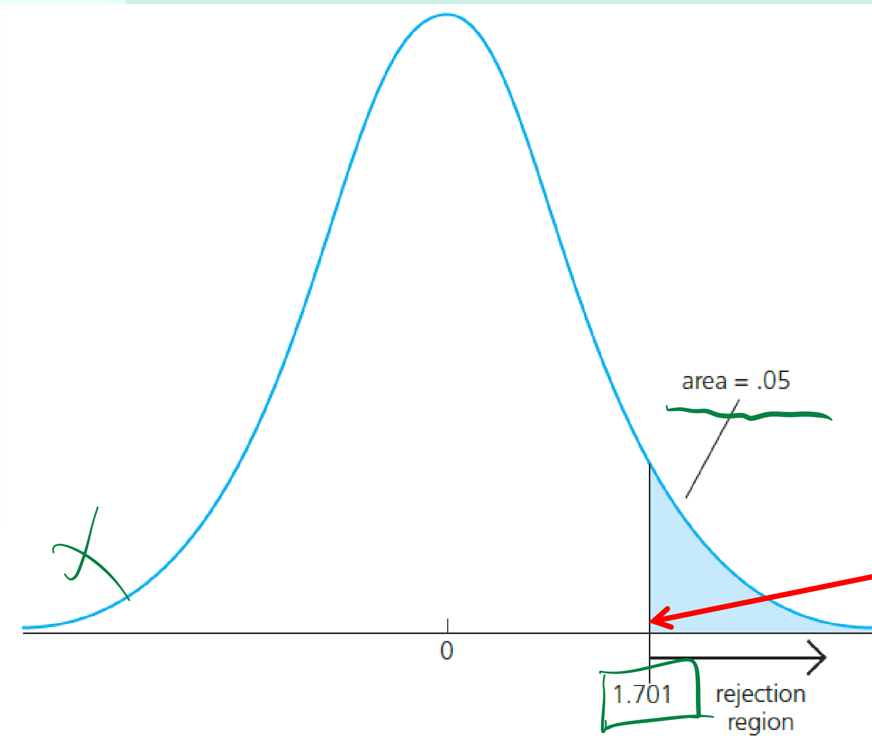
$$|t_{skipped}| = |-3.19| > c_{0.01} = 2.58$$

hsGPA和skipped对被解释变量的影响均在1%显著性水平上显著异于0。ACT的影响不显著，即使10%显著性水平上。

1% 显著 ≠0,

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **对单侧备择假设的检验（大于0）**



检验$H_0 : \beta_j = 0$ 备择假设 $H_1 : \beta_j > 0.$

如果估计系数“太大”（即大于临界值），则拒绝原假设，支持备择假设。

构造临界值，使得在原假设为真的情况下，它在5%（例如）的情况下被拒绝。

在给定的示例中，这是具有28个自由度的t分布，在5%的情况下服从该分布的随机变量会超过该点。

如果t统计量大于1.701，则拒绝原假设

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：工资等式**
  - 检验在控制了教育和任期后，更高的工作经验是否会导致更高的小时工资

$\frac{0.0041}{0.0017}$

$$\widehat{\log}(wage) = \underset{(.104)}{.284} + \underset{(.007)}{.092}\ educ + \underset{(.0017)}{.0041}\ exper + \underset{(.003)}{.022}\ tenure$$

$n = 526,\ R^2 = .316$

标准误差

Test $H_0 : \beta_{exper} = 0$ against $H_1 : \beta_{exper} > 0.$

经验对小时工资应该产生积极影响，或者不产生任何影响。

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：工资等式（续）**

t统计量

$$\boxed{t_{exper} = .0041/.0017 \approx 2.41}$$

自由度；近似于标准正态分布

$$df = n - k - 1 = 526 - 3 - 1 = 522$$

$$c_{0.05} = 1.645$$

5%和1%显著性水平的关键值

t统计量大于关键值，拒绝原假设

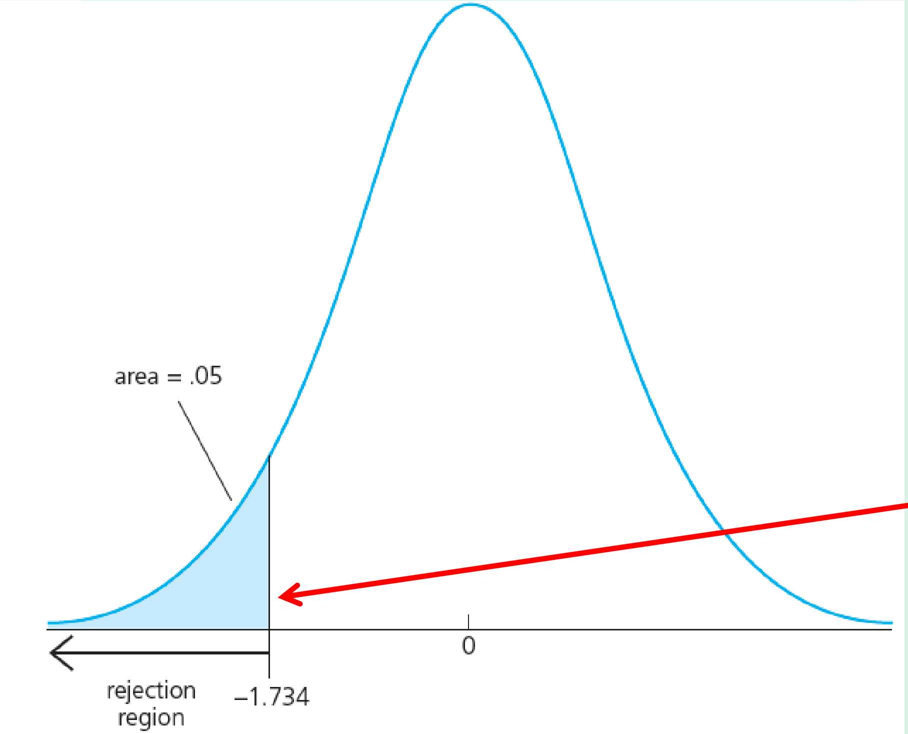
$$c_{0.01} = 2.326$$

1%，双也5%

"<u>在5%（甚至1%）显著性水平上，经验对小时工资的影响在统计学意义上大于零。</u>"

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **对单侧备择假设的检验（小于0）**



Test $H_0 : \beta_j = 0$ against $H_1 : \beta_j < 0$.

如果估计系数“太小”（即小于临界值），则拒绝原假设，支持备择假设。

构造临界值，使得在原假设为真的情况下，它在5%（例如）的情况下被拒绝。

在给定的示例中，这是具有18个自由度的t分布，在5%的情况下服从该分布的随机变量会超过该点。

如果t统计量小于-1.734，则拒绝原假设

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：学生成绩与学校规模**
  - 检测是否学校规模越小，学生表现越好

通过数学考试的学生比例（百分比）

教师平均年薪

每千名学生拥有的教职员工人数

学生注册人数(=学校规模)

$$\widehat{math10} = + \underset{(6.113)}{2.274} + \underset{(.00010)}{.00046}\ totcomp + \underset{(.040)}{.048}\ staff - \underset{(.00022)}{.00020}\ enroll$$

$$n = 408,\ \ R^2 = .0541$$

Test $H_0 : \beta_{enroll} = 0$ against $H_1 : \beta_{enroll} < 0$.

规模较大的学校会影响学生的表现吗？还是没有这种影响？

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：学生成绩与学校规模（续）**

$$\boxed{t_{enroll} = -.00020/.00022 \approx -.91}$$

t统计量

$$df = n - k - 1 = 408 - 3 - 1 = 404$$

自由度；这里近似正态

$$c_{0.05} = -1.65$$

5%和15%显著性水平的关键值

原假设没有被拒绝，因为t统计量大于关键值（绝对值小）

$$c_{0.15} = -1.04$$

<u>不能拒绝学习规模对学生成绩没有影响的假设</u>

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：学生成绩与学校规模（续）**
  - 另一种设定形式:

取log.

$$\widehat{math10} = -\underset{(48.70)}{207.66} + \underset{(4.06)}{21.16}\log(totcomp)$$

log

$$+\underset{(4.19)}{3.98}\log(staff) - \underset{(0.69)}{1.29}\log(enroll)$$

$$n = 408,\ R^2 = .0654$$ R2高了一点儿

Test $H_0 : \beta_{\log(enroll)} = 0$ against $H_1 : \beta_{\log(enroll)} < 0.$

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：学生成绩与学校规模（续）**

1.96

$$\boxed{t_{\log(enroll)} = -1.29/.69 \approx -1.87}$$

t统计量

$c_{0.05} = -1.65$ 5%显著性水平的关键值；拒绝原假设

学校规模对学生成绩没有影响的原假设被拒绝，接受负向影响的假设

"Economic Significance"

这种影响有多大？

+ 1% 注册人数; 通过math的百分比下降1.29个百分点

$$-1.29 = \frac{\Delta \widehat{math10}}{\Delta \log(enroll)} = \frac{\Delta \widehat{math10}}{\frac{\Delta enroll}{enroll}} = \frac{\frac{-1.29}{100}}{\frac{1}{100}} = \frac{-0.0129}{+1\%}$$

(small effect)

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **检验回归系数的其他假设**
- **原假设**

a

$$H_0: \ \beta_j = a_j$$

Hypothesized value of the coefficient

- **t统计量**

$$t = \frac{(estimate - hypothesized\ value)}{standard\ error} = \frac{(\hat{\beta}_j - a_j)}{se(\hat{\beta}_j)}$$

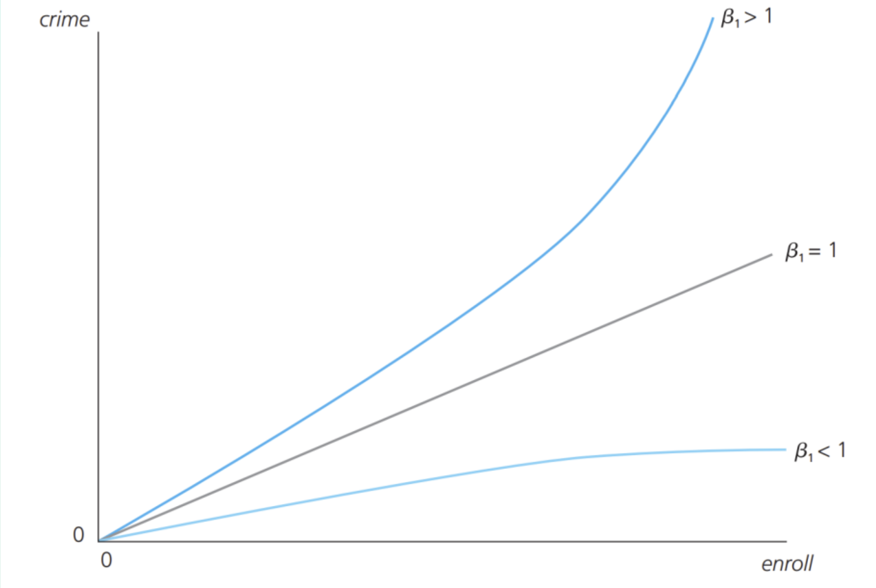
- **该检验的工作原理与之前完全相同，之前的情况是目前的一个特殊情形**

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：校园犯罪与注册人数**

$$\log(crime) = \beta_0 + \beta_1 \log(enroll) + u$$

  - 一个有趣的假设是，如果入学人数增加1%，犯罪次数是否会增加1%



检验对单个总体参数的假设：t检验

- **例子：校园犯罪与注册人数**

$$\widehat{\log}(crime) = \underset{(1.03)}{-6.63} + \underset{(0.11)}{1.27}\log(enroll)$$

估计量异于1，但统计上显著吗？

$$n = 97,\ R^2 = .585$$

$$H_0 : \beta_{\log(enroll)} = 1,\ H_1 : \beta_{\log(enroll)} \neq 1$$

5%水平下拒绝原假设

$$t = (1.27 \boxed{-1})/.11 \approx 2.45 > 1.96 = c_{0.05}$$

注意：假设检验的结论一定是对的吗

$\frac{1.27}{0.11}$ $\frac{1.27-1}{0.11}$

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **假设检验可能的四种情况**

$\beta_j = 0$ "$\beta_j \neq 0$"

现实 H_1 真

决策

	H0 is true	H0 is false
Fail to reject H0	✓	Type II error
Reject H0	Type I error	✓

False Negative.

False Positive.

第一类错误（Type I error）：拒绝原假设，但原假设为真

第二类错误（Type II error）：未能拒绝原假设，但原假设为假

I: $P(\text{Rej. } H_0 \mid H_0)$, II: $P(\text{F. Rej } H_0 \mid H_1)$

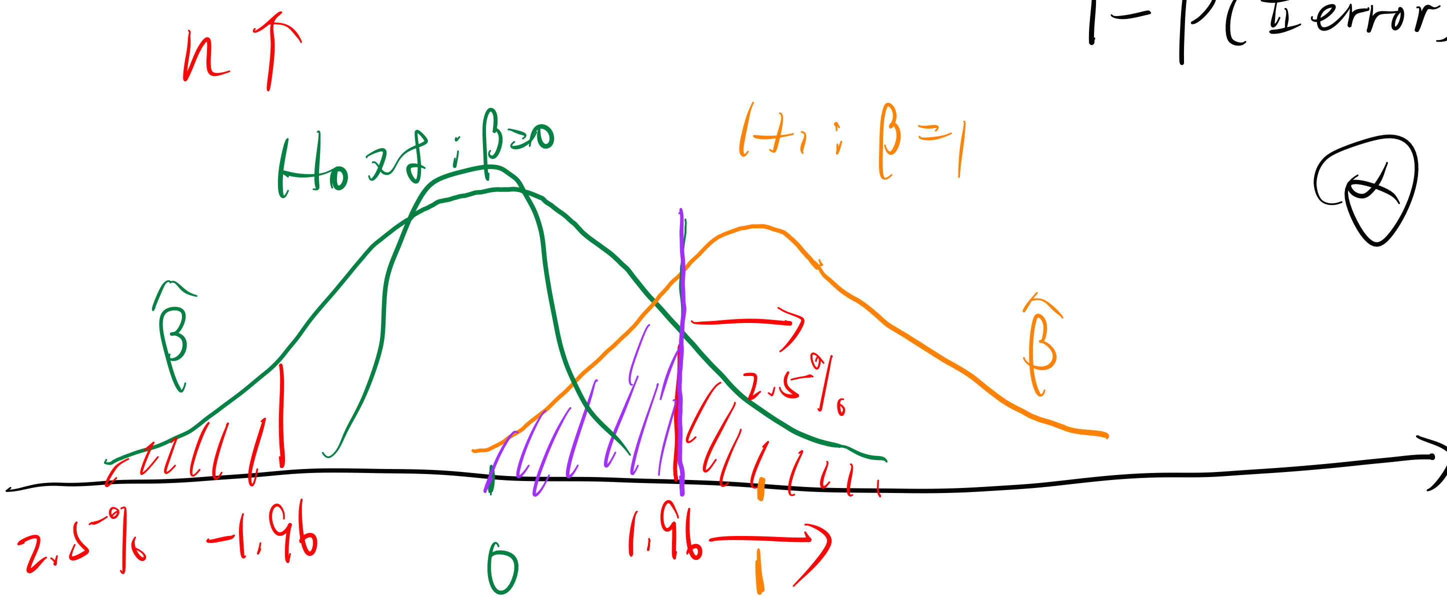
除非样本数增加，否则，只要 significance level 减小，

5% → 1%，把第Ⅱ类错误的概率 ↑，

β

"$1 - P$(Ⅱ error); power"

α size

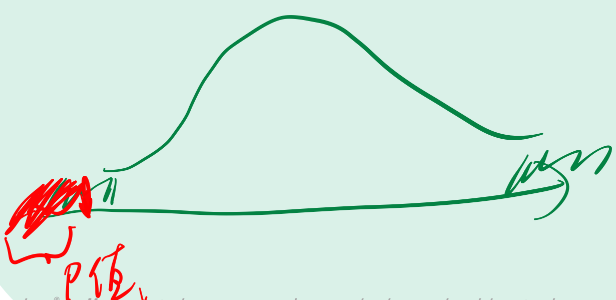


Type I error.

Type Ⅱ 越来越大，

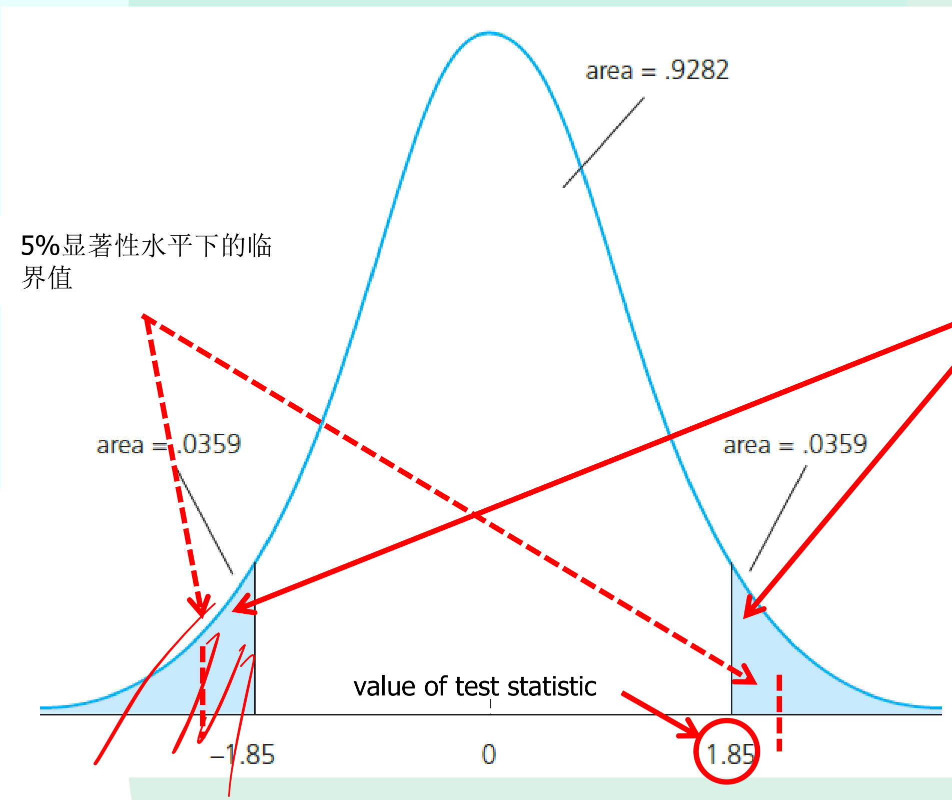
检验对单个总体参数的假设：t检验

- **计算t检验的p值（看图更清楚一些）**
  - 如果显著性水平越来越小，一定会出现一个无法再拒绝原假设的点
  - 原因是，通过降低显著性水平，我们越来越希望避免错误地拒绝一个正确的原假设H0（第一类错误，type I error）
  - 原假设被拒绝的最小显著性水平称为假设检验的p值
  - 较小的p值是拒绝原假设的证据，因为即使在很小的显著性水平上，我们也会拒绝原假设
  - 较大的p值是接受原假设的证据
  - p值比固定的显著性水平所包含的信息更多



检验对单个总体参数的假设：t检验

- **如何计算p值？（双侧备择）**



p值是一个显著性水平，在这个水平上，我们不能区分是否拒绝原假设

在双侧情况下， p值是t分布变量的绝对值大于检验统计量实现值的概率，例如：

$$P(|t-ratio| > 1.85) = 2(.0.359) = .0718$$

由此可知，<u>当且仅当相应的p值小于显著性水平时，原假设被拒绝</u>

例如，对于5%的显著性水平，t统计量不在拒绝区。

思考：单侧备择如何计算p值

检验对单个总体参数的假设：t检验

- **两种等价的拒绝规则（双侧备择）：**
- （1）如果t统计量的绝对值大于临界值，则拒绝原假设
- （2）如果t统计量对应的p值小于显著性水平，则拒绝原假设
- **对经济与统计显著的探讨（经济意义是模型的核心）**
  - 如果一个变量具有统计显著，讨论该系数的大小，了解其经济或实际重要性
  - 一个系数在统计上具有显著性这一事实并不一定意味着它在经济上或实际上具有显著性！如果一个变量在统计和经济上都很重要，但符号“错了”，该回归模型可能被误设了
  - 如果一个变量在通常的显著性水平（10%、5%或1%）上统计不显著，可以考虑将其从回归中删除。如果样本量很小，可能会对影响进行不精确的估计

置信区间

- **置信区间（confidence interval）**
- **对定理4. 2的简单变换得到**

双侧检验的关键值

$$P\left(\underbrace{\hat{\beta}_j - c_{0.05}\cdot se(\hat{\beta}_j)}_{\text{置信区间下界}} \le \beta_j \le \underbrace{\hat{\beta}_j + c_{0.05}\cdot se(\hat{\beta}_j)}_{\text{置信区间上界}}\right) = \underset{\text{置信水平}}{0.95}$$

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t(n-k-1)$$

- **置信区间的含义**
  - 置信区间的边界是随机的
  - 在重复样本中，总体回归系数将以95%的概率落入这个区间

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \le t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

置信区间

- **典型置信水平的置信区间**

$$P\left(\hat{\beta}_j - c_{0.01} \cdot se(\hat{\beta}_j) \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + c_{0.01} \cdot se(\hat{\beta}_j)\right) = 0.99$$

$$P\left(\hat{\beta}_j - c_{0.05} \cdot se(\hat{\beta}_j) \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + c_{0.05} \cdot se(\hat{\beta}_j)\right) = 0.95$$

$$P\left(\hat{\beta}_j - c_{0.10} \cdot se(\hat{\beta}_j) \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + c_{0.10} \cdot se(\hat{\beta}_j)\right) = 0.90$$

自由度足够大时 $c_{0.01} = 2.576, c_{0.05} = 1.96, c_{0.10} = 1.645$

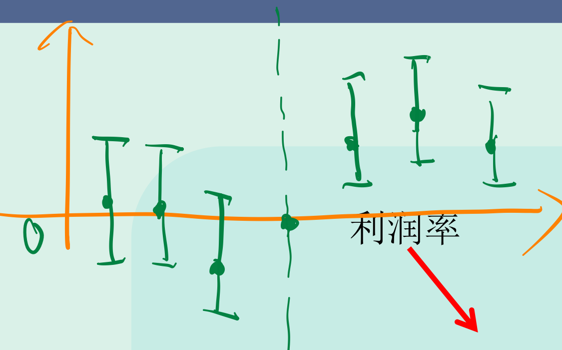
- **置信区间与假设检验的关系**
  - 假设检验：先给定基于原假设的分布，考察估计量的位置；置信区间：先给定估计量的分布，考察原假设的位置

$a_j \notin interval \Rightarrow$ 拒绝 $H_0 : \beta_j = a_j$ 接收 $H_1 : \beta_j \neq a_j$

置信区间

- **例子：研发（R&D）支出模型**

研发支出　　年销售额　　利润率



DID.
Diff-in-Diff.

$$\widehat{\log}(rd) = -\underset{(.47)}{4.38} + \underset{(.060)}{\boxed{1.084}}\ \log(sales) + \underset{(.0128)}{.0217}\ profmarg$$

$$n = 32,\ R^2 = .918,\ df = 32-2-1 = 29 \Rightarrow c_{0.05} = 2.045$$

$$1.084 \pm 2.045(.060) \qquad .0217 \pm 2.045(.0218)$$

$$= \boxed{(.961, 1.21)} \qquad\qquad = \boxed{(-.0045, .0479)}$$

由于区间较窄，销售额对研发的影响相对准确。此外，该效应显著异于0，因为0在区间之外。

由于区间较宽，该影响不精确。甚至不显著，因为0落在其中。

检验关于参数的一个线性组合假设

- **例子：两年制与四年制大学的教育回报**

两年制大学的就读年数

四
~~两~~年制大学的就读年数

工作月数

1.472 (0.021)　0.0667 (0.0068)　0.0769 (0.0023)　0.0049 (0.0002)

$$\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 jc + \beta_2 univ + \beta_3 exper + u$$

Test $H_0 : \beta_1 - \beta_2 = 0$ against $H_1 : \beta_1 - \beta_2 < 0$.

$0.0667 - 0.0769 = -0.0102$

一个可能的检验统计量是：

$$\boxed{t = \frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)}}$$

估计量之间的差异被标准化：除以估计量差异的标准误差。如果统计数据“太负”，无法相信参数之间的真实差异等于零，则必须拒绝原假设。

$var(\hat{\beta}_1) + var(\hat{\beta}_2) - 2cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$

检验关于参数的一个线性组合假设

$$se(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)=\sqrt{Var(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)}=\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)+Var(\hat{\beta}_2)-2Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)}$$

$Var(\hat{\beta})=\sigma^2(X'X)^{-1}$

一般的回归结果中没有

- **其他方法**

定义 $\theta_1=\beta_1-\beta_2$, test $H_0:\theta_1=0$ against $H_1:\theta_1<0$.

$$\log(wage)=\beta_0+\overset{\beta_1}{(\theta_1+\beta_2)}\boxed{jc}+\beta_2\boxed{univ}+\beta_3 exper+u$$

$$=\beta_0+\theta_1 jc+\beta_2\boxed{(jc+univ)}+\beta_3 exper+u$$

更改回归系数

一个新的自变量

检验关于参数的一个线性组合假设

- **实证结果**

高等教育的总年数

$$\widehat{\log}(wage) = \underset{(.021)}{1.472} - \underset{(.0069)}{.0102}\, jc + \underset{(.0023)}{.0769}\, totcoll + \underset{(.0002)}{.0049}\, exper$$

$$n = 6{,}763,\ \ R^2 = .222$$

10%水平拒绝原假设，但5%不拒绝

$$t = -.0102/.0069 = \boxed{-1.48}$$

$$p - value = P(t - ratio < -1.48) = .070$$

$$-.0102 \pm 1.96(.0069) = (-.0237, .0003)$$

- **该方法适用于单一线性假设**

对多个线性约束的检验：F检验

- **对排除性约束的检验**

资产定价：$\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_n=0$, "GRS" 横截面AP.

$$\log(\underbrace{salary}_{\boxed{\text{总薪水}}}) = \beta_0 + \beta_1 \underbrace{years}_{\text{加入联盟的年资}} + \beta_2 \underbrace{gamesyr}_{\text{每年参加比赛的平均次数}}$$

$$+\beta_3 \underbrace{bavg}_{\text{击球率}} + \beta_4 \underbrace{hrunsyr}_{\text{本垒打次数}} + \beta_5 \underbrace{rbisyr}_{\text{击球跑垒得分}} + u$$

$\boxed{H_0 : \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0}$ against $H_1 : H_0$ is not true

检验性能指标是否没有影响/可以从回归中剔除。

F检验：

"$R\beta - r = 0$"

H_0: $\underset{q\times K}{R} \cdot \underset{K\times 1}{\beta} = \underset{q\times 1}{r}$

R：行满秩. $\begin{cases} \text{没有冗余} \\ \text{没有矛盾.} \end{cases}$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$: $\beta_2 = \beta_3$? $\beta_4 = 0$?

R: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ r: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$\beta_4 = 0.5$?

F统计量（Wald 原理）

$$F = \frac{(R\hat{\beta}-r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)/q}{\hat{\sigma}^2} \sim F(q, n-k)$$

$$\frac{(R\hat{\beta}-r)'[\sigma^2 R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)/q}{(\hat{u}'\hat{u}/\sigma^2)/(n-k)}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k}$$

证明：

(1) $(R\hat{\beta}-r)'[\sigma^2 R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r) \mid X \sim \chi^2(m)$

(2) $a \mid X \sim \chi^2(n-k)$

$$\frac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma^2} \equiv a$$

$$\frac{u'}{\sigma} M \frac{u}{\sigma} \sim \chi^2(n-k)$$

(3) 分子分母独立。

$\mathrm{trace}(M) = n-k$，秩$(M) = n-k$

对多个线性约束的检验：F检验

- **无约束模型的估计**

$$\widehat{\log}(salary) = \underset{(0.29)}{11.19} + \underset{(.0121)}{.0689}\ years + \underset{(.0026)}{.0126}\ gamesyr$$

$$+ \underset{(.00110)}{.00098}\ bavg + \underset{(.0161)}{.0144}\ hrunsyr + \underset{(.0072)}{.0108}\ rbisyr$$

单一检测时，没有一个变量是显著的

$$n = 353,\ SSR = 183.186,\ R^2 = .6278$$

思路：如果将这些变量从回归中剔除，模型的拟合程度如何？

min SSR_r min SSR_{ur}

s.t. $R\beta = r$

对多个线性约束的检验：F检验

似然比检验原理.

Likelihood ratio

Chow

Tsou 检验

邹至庄.

- **估计约束模型**

$$\widehat{\log}(salary) = \underset{(0.11)}{11.22} + \underset{(.0125)}{.0713}\ years + \underset{(.0013)}{.0202}\ gamesyr$$

$$n = 353,\ SSR = \boxed{198.311}\ \ R^2 = .5971$$

SSR肯定会增加，但增加的显著吗？

和 Wald 等价.

Hayashi.

陈强.

- **F统计量**

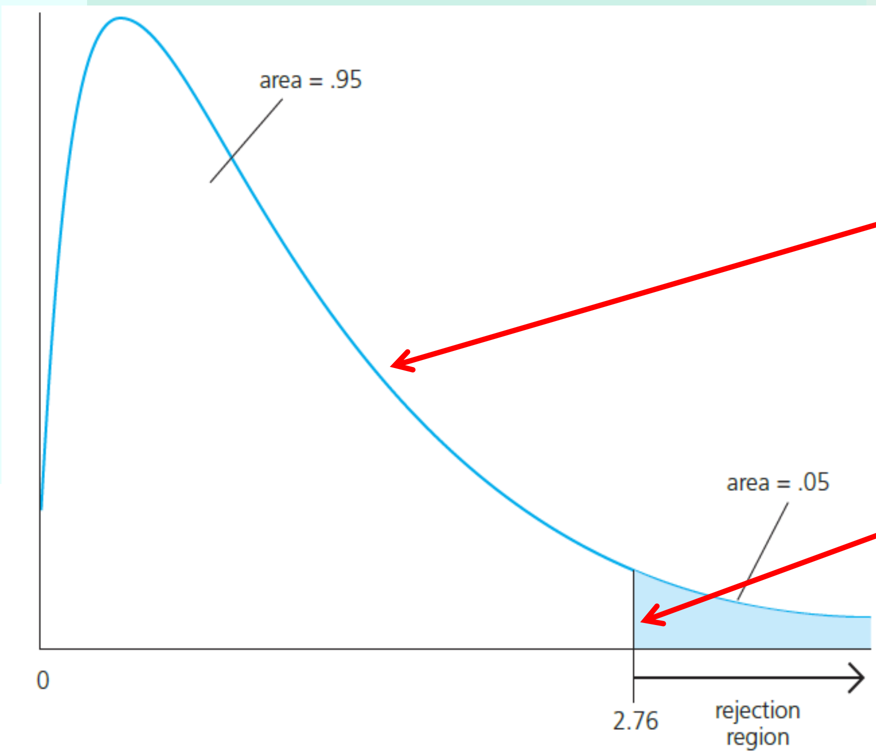
约束的个数

$$F = \boxed{\frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n-k-1)}} \sim F_{q,n-k-1}$$

（如果原假设H0是正确的）

对多个线性约束的检验：F检验

- **拒绝规则**



具有F分布的变量只具有正值，对应于施加约束后SSR只能增加。

尽管原假设为真，选择临界值，以便在例如5%的情况下拒绝原假设。

对多个线性约束的检验：F检验

约束数

$$F = \frac{(198.311 - 183.186)/3}{183.186/\boxed{(353-5-1)}} \approx \boxed{9.55}$$

无约束模型的自由度

$$F \sim F_{3,347} \;\Rightarrow\; c_{0.01} = 3.78$$

$$P(F - statistic > 9.55) = 0.000$$

原假设被拒绝（p值太小了）

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j(1-R_j^2)}$$

t：显著。
F：不显著。
某个x解释力弱
联合一起挺强

- **讨论**
  - 这三个变量是“联合显著的”
  - 单变量检验时不显著
  - 可能的原因是多重共线性

对多个线性约束的检验：F检验

- **检验回归的整体显著性**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + u$$

$$\boxed{H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0}$$ ← 原假设表明，解释变量没用

$$\begin{cases} SSR_r = SST(1-R_r^2) \\ SSR_{ur} = SST(1-R_{ur}^2) \end{cases}$$

$$y = \beta_0 + u$$ ← 约束模型（有截距项）

$$(R_{ur}^2 - R_r^2)$$

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n-k-1)} = \frac{\cancel{R^2}/\cancel{k}\ q}{(1-R_{ur}^2)/(n-k-1)} \sim F_{k,n-k-1}$$

- **大多数软件包中都报告了总体显著性检验；原假设通常被压倒性地拒绝**

对多个线性约束的检验：F检验

- **检验一般的线性约束**
- **例子：检验房屋估值是否合理**

实际的房屋价格

估值（卖之前）

占地面积（英尺）

$$\log(price) = \beta_0 + \beta_1 \log(assess) + \beta_2 \log(lotsize)$$

$$+ \beta_3 \log(sqrft) + \beta_4 bdrms + u$$

平方英尺数

卧室数

$$\boxed{H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0}$$

此外，一旦估值已被控制，其他已知因素不应影响价格。

如果房价评估是合理的，那么1%的估值变化应对应于1%的房价变动。

对多个线性约束的检验：F检验

- **无约束回归**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + u$$

- **约束回归**

约束模型等价于 [y-x_1]对常数进行回归

$$y = \beta_0 + x_1 + u \;\Rightarrow\; [y - x_1] = \beta_0 + u$$

- **统计量**

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n-k-1)} = \frac{(1.880 - 1.822)/4}{1.822/(88-4-1)} \approx .661$$

$$F \sim F_{4,83} \;\Rightarrow\; c_{0.05} = 2.50 \;\Rightarrow\; H_0 \text{ 不能被拒绝}$$

对多个线性约束的检验：F检验

- 无约束回归的回归结果

$$\widehat{\log}(price) = \underset{(.570)}{.264} + \underset{(.151)}{1.043}\log(assess) + \underset{(.0386)}{.0074}\log(lotsize)$$

$$- \underset{(.1384)}{.1032}\log(sqrft) + \underset{(.0221)}{.0338}\, bdrms$$

单一检验时不显著，也不能说明H0被拒绝

$$n = 88, SSR = 1.822, R^2 = .773$$

- F统计量适用于一般多元线性假设
- 对于所有检验和置信区间，假设MLR.1 – MLR.6是有效的；否则检验可能无效。

本章小节

在经典线性模型假定 MLR1到 MLR6下，

- OLS估计量是正态分布的
- t统计量在原假设条件下服从t分布，针对单或双侧假设，我们利用统计对单数进行假设检验
- 我们可以通过计算临界值或者p值进行检验，不同的显著性水平、备择假设或者df都会影响临界值和p值
- 基于t分布，我们可以构造真实参数的一个置信区间
- F统计量可用于检验多重排除约束， F检验的备择假设是双侧备择假设，但拒绝域在F分布的右侧