用数学进行经济分析（二）

博弈论、合约理论、机制设计

赵博

南开大学金融学院

2026 年 5 月 18 日

一般均衡的问题

核心问题

- 一般均衡把市场协调问题写成价格向量和市场出清：

$$z(p^*) = 0$$

- 这套体系的优点：形式清楚。偏好、选择、价格、均衡、效率被放进同一个公理化框架
- 除此之外，和现实几乎没有关系
    - 均衡存在不等于唯一、稳定、可达、可预测
    - 价格形成过程、信息生成、合约执行、制度规则和组织结构大多被处理为外部条件
    - 时刻关注模型的缺陷，才不会犯 Lange 的错误
- 后续微观理论逐渐改进

改进方向

层次	处理的问题	理论
基础语言	少数主体相互影响，收益取决于策略组合	博弈论
信息结构	质量、能力、风险、成本等信息不对称	信息经济学：不完全信息博弈、信号、筛选
激励与执行	努力、质量和未来状态难以观察或验证	合约理论：委托代理、激励约束、不完全合约
规则设计	规则会改变报告、行动和参与，也会被策略性利用	机制设计：设计博弈形式，使均衡结果满足目标

模型对比

	一般均衡	后续微观理论
给定对象	消费集 X_i，偏好 $\succsim_i$，禀赋 ω_i，生产集 Y_j，企业所有权份额 θ_{ij}	参与者，行动/策略集合，收益函数，时序，信息结构；不完全信息下还包括类型空间与先验分布
个体面对的参数	消费者和企业都把价格 p 当作给定；消费者预算收入由 $p \cdot \omega_i$ 和利润分配决定	参与者面对规则、信息、可观察变量、他人策略或关于他人策略的信念
选择变量	消费者选择消费束 $x_i \in X_i$；企业选择生产计划 $y_j \in Y_j$	参与者选择行动/策略；具体可能是努力、报价、报告、投资、进入、退出等
个体目标	消费者在预算约束下最大化效用；企业在技术约束下最大化利润 $p \cdot y_j$	给定规则和信息条件下最大化自身收益或期望收益
均衡中决定	价格 p，消费配置 (x_i)，生产配置 (y_j)，以及由生产决定的利润	策略组合、行动结果、信念；合约或机制模型中还包括合约、转移支付、配置结果
均衡条件	给定价格下消费者最优、企业利润最大化，并且总配置可行/市场出清	Nash、子博弈完美、贝叶斯 Nash、完美贝叶斯等；机制设计还需满足激励相容、参与约束、可行性

历史路线图

时间	理论节点	方法论含义
1944	von Neumann–Morgenstern	博弈论诞生（合作博弈）
1950–1951	Nash	非合作均衡概念提出（后续所有非合作博弈均衡的概念几乎都基于此）
1960s–1970s	Harsanyi, Akerlof, Spence, Stiglitz	信息差异进入模型
1970s–1980s	Hurwicz, Maskin, Myerson	规则设计进入模型
1980s–以后	Holmström, Grossman, Hart, Moore, Tirole, Roth, Milgrom, Wilson 等	合约、产权和组织进入模型；市场和产业结构

博弈论

为什么需要博弈论

- 完全竞争中，个体太小，不影响价格
- 但很多经济问题中，每个人都知道自己的行动会改变他人处境
- 例子：
  - 两家企业是否降价
  - 工人与企业如何谈判
  - 平台是否补贴某一侧用户
  - 政府拍卖资源时，竞标者如何隐藏估价
- 这些问题的共同结构：我的最优选择取决于你怎么选

博弈的基本对象

标准型博弈（normal-form game）

$$G = \langle N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N}\rangle$$

- N：参与者集合
- S_i：参与者 i 的策略集合
- $s = (s_1, \dots, s_n)$：策略组合
- $u_i(s_i, s_{-i})$：参与者 i 的收益

关键变化

效用不再只取决于自己的选择，也取决于别人的策略。

占优策略：最强的理性要求

严格占优

若对任意 s_{-i} 都有

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}),$$

则 s_i 严格占优 s_i'。

- 占优策略不需要预测别人怎么做
- 但现实中占优策略常常不存在
- 这迫使理论转向更弱、更普遍的均衡概念

囚徒困境：个人理性与集体结果

	B 合作	B 背叛
A 合作	$(3,3)$	$(0,5)$
A 背叛	$(5,0)$	$(1,1)$

- 对每个人来说，背叛都是占优策略
- 结果是 $(1,1)$，但双方都合作可以得到 $(3,3)$
- 这里的问题不是稀缺性本身，而是策略结构

重点

“个体理性”不自动推出“集体最优”。

Nash 均衡

定义

策略组合 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ 是 Nash 均衡，如果对每个参与者 i：

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$$

- 每个人的策略都是对其他人策略的最优反应
- 没有人有动机单方面偏离
- 不是“社会最优”，而是“互相预期一致”

混合策略：随机化作为策略

- 有些博弈没有纯策略 Nash 均衡
- 允许参与者在策略上使用概率分布：

$$\sigma_i \in \Delta(S_i)$$

- 混合策略均衡要求：参与者在其正概率使用的策略之间无差异

$$s_i \in \operatorname{supp}(\sigma_i^*) \Rightarrow s_i \in \arg\max_{s_i'} u_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$$

- 概率不只是外部噪声，也可以是策略的一部分

混合策略的 NE

- 有限博弈中，令 $\Delta(S_i)$ 表示参与者 i 的混合策略集合
- 给定其他人的混合策略 σ_{-i}，参与者 i 的最佳反应对应（correspondence）为

$$BR_i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

- 全体参与者的最佳反应 correspondence：

$$BR(\sigma) = \left\{(\sigma_1', \ldots, \sigma_n') : \sigma_i' \in BR_i(\sigma_{-i}),\ \ i = 1, \ldots, n\right\}$$

- Nash 均衡就是一个不动点：

$$\sigma^* \in BR(\sigma^*)$$

- 不是“某个函数的交点”。“一个集合值 correspondence 把自己送回自己”

Kakutani 描述的是 correspondence

BR 通常是集合值 correspondence，不是单值函数；混合策略空间紧、凸，最佳反应对应非空、凸值、上半连续。

NE 的数学要求

- NE 是一个均衡的概念，不同的数学场景下可能有 NE，也可能没有 NE
- 经典的论文是 Brouwer 不动点定理，一般用的是 Kakutani（非空，compact, convex，连续，等）
- 有其他的改进
- 不同的改进对应着不同的数学要求：尽量放松

问题

- 如果存在某个 i 的初始策略不是 BR，能否最终一定走到 NE？

Nash 均衡与竞争均衡的差别

	竞争均衡	Nash 均衡
个体面对什么	个体把价格 p 当作给定	个体把其他人的策略 s_{-i} 当作给定
个体选择什么	消费者选 x_i；企业选 y_j	参与者选策略或行动 s_i
最优性条件	给定价格下消费者最优、企业利润最大化	给定他人策略下没有单方面偏离收益
一致性条件	市场出清	策略之间相互构成最优反应

Cournot：寡头竞争的博弈化

- 两个企业选择产量 q_1, q_2
- 价格由总产量决定：

$$P(Q) = a - bQ, \qquad Q = q_1 + q_2$$

- 企业 i 的利润：

$$\pi_i(q_i, q_j) = P(q_i + q_j)q_i - cq_i$$

- 一阶条件给出反应函数：

$$q_i = R_i(q_j)$$

- 均衡是两个反应函数的交点

变化

企业不再是价格接受者，而是在预判对手行动时选择产量。

博弈论拓展

动态博弈：时间顺序进入模型

- 很多互动不是同时行动，而是有先后顺序
- 标准型博弈只写“策略集合”，扩展型博弈写行动顺序、信息集和收益
- 子博弈完美均衡（Subgame perfect Nash equilibrium，SPNE）：

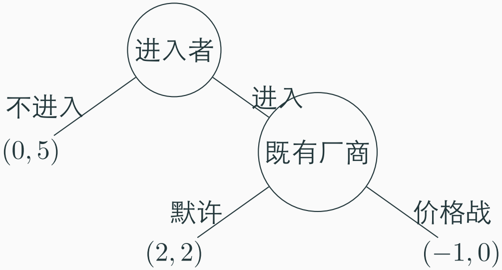
每一个子博弈中，策略都构成 Nash 均衡

- 目的：排除不可信威胁

例子

进入者威胁进入，既有厂商威胁降价。关键不是口头威胁，而是威胁在实际节点上是否理性。

扩展型博弈 (extensive form)：进入威胁



- 收益：(进入者，既有厂商)
- 如果进入已经发生，既有厂商比较 2 和 0，会选择默许
- 进入者预见这一点，比较进入得 2 与不进入得 0，会选择进入

反向归纳 Backward Induction

子博弈完美均衡是：进入者进入；既有厂商在进入后默许。价格战威胁不是可信威胁。

子博弈完美：perfect 的含义

- 这里的 perfect 不是“完美信息”（见下）的意思
- 它指的是对 Nash 均衡的精炼：策略组合要在每一个子博弈中仍然构成 Nash 均衡

$$\text{SPNE} = \text{在所有子博弈上都成立的 Nash 均衡}$$

- 在进入博弈中，进入之后开始了一个子博弈

核心作用

子博弈完美均衡排除依赖不可信威胁的 Nash 均衡。它要求策略不只在博弈起点看起来合理，也要在每个实际可能到达的子博弈中合理。

问题：(“不进入”，“若进入则价格战”) 是不是一个 NE？是不是一个 SPNE？

重复博弈：合作如何可能

- 一次囚徒困境中，背叛是占优策略
- 如果同一批人反复互动，未来惩罚会被贴现到当期，改变当前激励
- 无限期折现收益：

$$U_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i^t, \qquad 0 < \delta < 1$$

- 这里的关键是贴现率，也就是对未来收益或损失的看重程度：当 δ 足够高时，合作可能由自利行为支撑 (Folk Theorem)

现实中：

重复互动、声誉和惩罚也可以形成秩序。

不完全信息与不完美信息

不完全信息（incomplete information）

参与者不知道某些决定收益的基本对象，例如他人的估值、成本、能力、质量、风险或偏好。

不完美信息（imperfect information）

参与者不知道博弈过程中的某些历史或自然状态，例如对方已经采取的行动、自然抽取的状态，或自己处在哪个信息集。

- 不完全信息说的是：博弈的收益相关特征没有被所有人共同知道
- 不完美信息说的是：博弈进行中有些节点或历史没有被观察到
- 两者相关，但不是同一个概念

Harsanyi 转换：把私人信息写成类型

- 原来的问题：参与者不知道他人的收益相关特征

估值、成本、能力、质量、风险、偏好

- Harsanyi 的做法：引入自然节点，先抽取类型组合

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta, \qquad \theta \sim p(\theta)$$

- 参与者 i 只观察自己的类型 θ_i，没有观察到 θ_{-i}

$$p(\theta_{-i} \mid \theta_i)$$

- 收益函数写成类型依赖形式

$$u_i(a_i, a_{-i}; \theta_i, \theta_{-i})$$

转换

不完全信息被改写为：自然先选择类型，但类型只被部分观察到。因此它变成一个不完美信息博弈。

Harsanyi 转换的前提

- 这个转换要求类型空间已经给定

$$\Theta = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$$

- 还要求存在共同先验

$$p(\theta)$$

- 参与者观察自己的类型后，用 Bayes 法则形成条件信念

$$p(\theta_{-i} \mid \theta_i)$$

- 因此，Harsanyi 转换处理的是可概率化的私人信息，不是所有形式的无知

限制

如果参与者不知道可能有哪些类型，或者对类型分布没有共同先验，或者面对的是模糊性与规则不确定性，Harsanyi 转换就不再是一个自然的描述。

类型依赖策略与期望收益

- 在不完全信息博弈中，

$$s_i : \Theta_i \to A_i$$

- $s_i(\theta_i)$ 表示：如果参与者 i 的类型是 θ_i，他选择什么行动
- 给定其他人的类型依赖策略 s_{-i}，类型 θ_i 的期望收益是

$$\sum_{\theta_{-i}} p(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i\big(a_i, s_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}\big)$$

贝叶斯 Nash 均衡（Bayesian Nash equilibrium）

定义

策略组合 $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ 是贝叶斯 Nash 均衡，如果对每个参与者 i 和每个类型 θ_i：

$$s_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{a_i \in A_i} \sum_{\theta_{-i}} p(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i\big(a_i, s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}\big)$$

- 每种类型都在自己的条件信念下选择最优行动
- 均衡对象是一组类型依赖策略，而不是单个行动组合
- 私人信息通过类型进入模型，也通过行动影响他人的判断

博弈论的收益与代价

现实的描述	收益	主要代价
策略互动	分析寡头、谈判、竞争、进入威胁	均衡可能很多，预测不唯一
时间顺序	处理承诺、威胁、声誉	对理性（复杂的计算能力）和共同知识（我知道你知道我知道你知道……）要求很高
不完全信息	把私人信息写成类型可以简化处理很多复杂情况	先验分布和信念常常难验证
重复互动	解释合作、声誉和惩罚	长期关系和外部执行难以完整刻画

信息经济学

完美信息假设被放松

- 一般均衡中的市场参与者全知全能：知道商品、价格、状态和交易机会
- 信息经济学：现实中，信息差异本身就是经济结构
- 两类基本问题：
  - 逆向选择（Adverse selection）：交易前，一方知道质量或类型，另一方不知道
  - 道德风险（Moral hazard）：交易后，一方行动不可观察
- 逆向选择中又有两种典型信息揭示机制：
  - 信号传递（Signaling）：信息多的一方通过有成本的行动传递类型信息
  - 筛选（Screening）：信息少的一方设计菜单，让不同类型自我选择

变化

市场失败不再只是外部性或垄断；信息不对称也能让市场消失。

Akerlof：柠檬市场

- 二手车卖家知道车的质量，买家不知道
- 买家只能按平均质量出价
- 好车卖家认为价格太低，退出市场
- 平均质量继续下降，买家愿付价格继续下降

逆向选择

质量好的交易对象更可能退出，留下来的反而是质量差的。

一个极简柠檬模型

- 好车价值 v_H，坏车价值 v_L，且 $v_H > v_L$
- 好车比例为 λ
- 买家愿意支付的期望价值：

$$p = \lambda v_H + (1 - \lambda) v_L$$

- 若好车卖家的保留价格 $r_H > p$，好车退出
- 一旦好车退出，市场只剩坏车，价格进一步下降

含义

有时价格机制会被信息问题破坏。

问题

问题：现实中，为什么二手车市场没有消失？

信息经济学

信号传递 Signaling

Spence：信号传递

- 工人知道自己的能力，企业不知道
- 能力有两类：

$$\theta \in \{H, L\}, \qquad y_H > y_L$$

- y_θ 是生产率，教育 e 本身不提高生产率
- 教育成本依赖类型：

$$c_H(e) < c_L(e), \qquad e > 0$$

- 企业观察教育 e，但不能直接观察类型 θ

Spence 模型：工资与信念

- 令企业观察到 e 后相信工人为高能力的概率是

$$\mu(e) = \Pr(H \mid e)$$

- 竞争性企业按预期生产率支付工资：

$$w(e) = \mu(e)y_H + \big(1 - \mu(e)\big)y_L$$

- 类型为 θ 的工人选择教育 e，收益为

$$w(e) - c_\theta(e)$$

- 此时，教育影响工资，不是因为它提高生产率，而是因为它改变企业的信念 $\mu(e)$

分离均衡：定义

- 分离均衡中，不同类型选择不同教育水平

$$e_H = e^*, \qquad e_L = 0$$

- 企业在均衡路径上能完全识别类型：

$$\mu(e^*) = 1, \qquad \mu(0) = 0$$

- 因此工资为

$$w(e^*) = y_H, \qquad w(0) = y_L$$

- 这时教育 e^* 成为高能力的信号

分离均衡：激励约束

- 高能力者愿意选择 e^*，而不是选择 0：

$$y_H - c_H(e^*) \geq y_L - c_H(0)$$

- 低能力者不愿意模仿高能力者：

$$y_L - c_L(0) \geq y_H - c_L(e^*)$$

- 若设 $c_H(0) = c_L(0) = 0$，则分离均衡要求

$$c_H(e^*) \leq y_H - y_L \leq c_L(e^*)$$

含义

同一个教育水平 e^* 对高能力者成本低、对低能力者成本高；所以它能够区分类型。

混同均衡：定义

- 混同均衡中，不同类型选择同一个教育水平

$$e_H = e_L = \bar{e}$$

- 企业观察到 $\bar{e}$ 后不能区分类型，只能使用先验概率

$$\Pr(H) = \lambda$$

- 因此竞争性工资为平均生产率

$$w(\bar{e}) = \lambda y_H + (1-\lambda) y_L$$

- 这时教育没有传递类型信息

混同均衡为什么可能成立

- 关键在于：如果有人偏离到 $e \neq \bar{e}$，企业如何解释这个偏离？
- 例如，若企业对所有偏离教育水平都持悲观信念：

$$\mu(e) = 0, \qquad e \neq \bar{e}$$

- 那么偏离者只能得到

$$w(e) = y_L$$

- 若两类工人都不愿意偏离，则 pooling 可以成为均衡

$$w(\bar{e}) - c_\theta(\bar{e}) \geq y_L - c_\theta(e), \qquad \forall e \neq \bar{e},\ \theta \in \{H, L\}$$

关键

混同均衡能否成立，不只取决于成本和生产率，也取决于偏离路径上的信念。

信号博弈的多重均衡问题

- 分离均衡要求：

$$c_H(e^*) \leq y_H - y_L \leq c_L(e^*)$$

- 混同均衡要求：给定某种偏离路径信念，没有类型愿意偏离

$$w(\bar{e}) - c_\theta(\bar{e}) \geq w(e) - c_\theta(e)$$

- 因此，同一组参数下，可能同时存在分离均衡和混同均衡
- 信号博弈通常需要进一步讨论均衡精炼，例如哪些偏离信念更合理

问题

你觉得什么教育是比较单纯的信号传递，和能力提升关系不大？

信息经济学

其他模型

Stiglitz：筛选 Screening

- 信息少的一方也可以主动设计菜单
- 保险公司不知道投保人风险高低
- 它可以提供一组保单：

$$\{(premium_k, coverage_k)\}_{k=1}^{K}$$

- 让不同风险类型自我选择

从信号到筛选

信号是信息多的一方主动发出；筛选是信息少的一方设计选择环境。

筛选模型：保险菜单

- 投保人有两种风险类型：

$$\theta \in \{L, H\}, \qquad \pi_H > \pi_L$$

- 保险公司不知道个体类型，只能设计合约菜单

$$\{(p_L, c_L), (p_H, c_H)\}$$

- 菜单要让不同类型自己选对应合约：

$$U_L(p_L, c_L) \geq U_L(p_H, c_H), \qquad U_H(p_H, c_H) \geq U_H(p_L, c_L)$$

- 还要让每种类型愿意参保：

$$U_\theta(p_\theta, c_\theta) \geq \bar{U}_\theta, \qquad \theta = L, H$$

含义

保险公司没有直接观察类型，而是通过菜单和自选择约束，让类型差异表现为合约选择差异。

问题

飞机和高铁不是只卖一种票，而是设计多种票：

经济舱， 商务舱， 头等舱

问题：

- 为什么低价票常常不能退改，或者退改成本很高？
- 为什么商务舱的价格远高于座位成本差异？
- 为什么航空公司要设置积分、休息室、优先登机等服务？

道德风险：行动不可观察

- 交易后，代理人的努力 e 不能被委托人直接观察
- 产出由努力和随机因素共同决定：

$$y = f(e) + \varepsilon$$

- 工资只能依赖可观察产出：

$$w = w(y)$$

- 代理人选择努力：

$$e^* \in \arg\max_{e} \mathbb{E}_{\varepsilon}\left[u\big(w(f(e)+\varepsilon)\big) - c(e)\right]$$

有信息问题和无信息问题对比

问题	古典/新古典直觉	信息经济学改写
价格	反映稀缺性	也可能被质量混同扭曲
教育	提高人力资本	也可能是能力信号
保险	分散风险	也会改变风险行为和参保结构
合约	规定交易条款	还要处理隐藏行动和隐藏信息

合约理论

合约理论的核心问题

- 合约的作用：约束各方行为
- 在信息不完全、行动不可观察、未来不可完全列举时，什么安排可执行？
- 合约理论处理三类约束：
  - 激励约束：代理人是否愿意按合约希望的方式行动
  - 参与约束：代理人是否愿意接受合约
  - 可验证约束：法院或第三方能否验证合约条件、推动合约执行

变化

从“最优配置”转向“可激励、可参与、可执行的配置”。

委托–代理模型

- 委托人设计工资方案 $w(y)$
- 代理人选择努力 e
- 产出：

$$y = f(e) + \varepsilon$$

- 委托人的目标：

$$\max_{w(\cdot),\, e^*} \mathbb{E}_\varepsilon \left[f(e^*) + \varepsilon - w(f(e^*) + \varepsilon)\right]$$

- 约束：合约必须使 e^* 对代理人最优，并使代理人愿意接受
- 代理人的效用：

$$\mathbb{E}_\varepsilon \left[u\big(w(f(e) + \varepsilon)\big) - c(e)\right]$$

- 注意：效用的假设

两个关键约束

参与约束 Individual Rationality (IR)

$$\mathbb{E}_\varepsilon\left[u\big(w(f(e^*)+\varepsilon)\big)-c(e^*)\right]\geq \bar{U}$$

激励相容约束 Incentive Compatibility (IC)

$$e^*\in\arg\max_{e}\mathbb{E}_\varepsilon\left[u\big(w(f(e)+\varepsilon)\big)-c(e)\right]$$

- 参与约束：为什么代理人愿意签合约
- 激励约束：为什么签完合约后代理人愿意努力

风险分担与激励的权衡

- 如果代理人风险厌恶，固定工资可以提供保险
- 但固定工资削弱努力激励
- 高绩效工资能激励努力，但把风险转嫁给代理人
- 最优合约通常在两者之间折中：

$$\text{insurance} \quad \textit{vs.} \quad \text{incentives}$$

方法论含义

“效率”不再只是资源配置效率，还包括信息和激励约束下的可实现效率。

Holmström：信息含量原则

- 绩效指标是否应该进入合约，取决于它是否提供关于努力的信息
- 如果某个信号 s 能帮助区分努力与运气，就应当被用于报酬设计
- 合约不一定只看绝对产出，也可以看相对绩效：

$$w = w(y_i, y_j)$$

- 例如：同行都差时，低产出可能不是个人懈怠；同行都好时，低产出更可疑

不完全合约：未来无法完全写进合约

- 完全合约假设：未来所有状态都可预见、可描述、可验证
  - 如果所有的未来状态都可以讲清楚，那么产权就可以不需要。不满意的地方可以谈判解决。
- 不完全合约理论认为：这在现实中通常不成立
- 因而重要的是剩余控制权：

未被合约写明的情况下，谁说了算？

- 产权安排影响事前投资激励

Hart 的核心洞见

企业边界不只是技术问题，也是控制权和投资激励问题。

产权与企业边界：几条理论线索

- Coase：市场交易有成本，企业用权威关系替代部分市场交易
- Alchian–Demsetz：团队生产中个人贡献难以度量，需要监督和剩余索取权
- Williamson：资产专用性导致 hold-up，治理结构影响交易成本
- Grossman–Hart–Moore：合约不完全时，所有权意味着剩余控制权
- Aghion–Tirole：正式权威与实际权威可能分离
- Holmström–Milgrom：多任务环境下，强激励会扭曲努力分配
- 对企业家认识的变化：Cantillon，Say，Marx，Knight，Schumpeter，Mises/Hayek/Kirzner，Coase, Hart⋯⋯

合约理论的小结

- 它把制度和组织带回了微观理论
- 但常常仍要求明确的目标函数、信息结构和可验证变量
- 现实合约中还有信任、法律文化、谈判权力、关系网络
- 合约理论是制度问题的局部形式化

机制设计

机制设计的基本问题

- 博弈论通常问：规则给定以后，参与者会怎样行动？

$$\text{rules} \Rightarrow \text{equilibrium behavior}$$

- 机制设计反过来问：如果我们想实现某种结果，应该设计什么规则？

$$\text{desired outcome} \Rightarrow \text{rules}$$

- 难点在于：参与者有私人信息，并且会按照自身利益行动

核心问题

规则不能假设参与者诚实；规则要让“诚实”本身成为最优选择。

例子：分配一个物品

- 有一个物品，要分配给 n 个参与者之一
- 参与者 i 对物品的真实估值是

$$v_i$$

- 但 v_i 只有参与者 i 自己知道
- 如果目标是效率，物品应给估值最高的人：

$$i^* \in \arg\max_i v_i$$

- 问题是：机制设计者看不到真实的 v_i

问题

如果直接问每个人“你的估值是多少”，为什么他们要如实回答？

机制设计：基本符号

- 参与者集合：

$$N = \{1, \ldots, n\}$$

- 参与者 i 的私人类型：

$$\theta_i \in \Theta_i$$

- 类型组合：

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n$$

- 机制要求参与者发送消息：

$$m_i \in M_i$$

- 机制根据消息决定配置和支付：

$$x(m_1, \ldots, m_n) \in X, \qquad p_i(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}$$

效用：为什么支付有用

- 常用拟线性效用：

$$u_i(x, p_i; \theta_i) = v_i(x; \theta_i) - p_i$$

- $v_i(x; \theta_i)$：类型为 θ_i 的参与者从结果 x 得到的价值
- p_i：参与者 i 支付给机制的金额
- 机制可以通过支付改变参与者的激励

直觉

机制设计不是只决定“谁得到什么”，还决定“每个人为结果支付多少”。

直接机制

- 一般机制中，消息可以很复杂：

$$m_i \in M_i$$

- 直接机制把消息空间设为类型空间：

$$M_i = \Theta_i$$

- 参与者报告一个类型：

$$\hat{\theta}_i \in \Theta_i$$

- 机制根据报告的类型组合决定结果：

$$x(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n), \qquad p_i(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)$$

注意

直接机制不是假设人会诚实，而是专门研究什么规则能让诚实报告成为最优。

占优策略激励相容 DSIC

定义

直接机制 (x, p) 是占优策略激励相容的，如果对任意参与者 i、任意真实类型 θ_i、任意误报 $\hat{\theta}_i$、任意他人类型 θ_{-i}：

$$v_i(x(\theta_i, \theta_{-i}); \theta_i) - p_i(\theta_i, \theta_{-i}) \geq v_i(x(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}); \theta_i) - p_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$$

- 左边：真实类型为 θ_i，并且如实报告
- 右边：真实类型仍是 θ_i，但报告成 $\hat{\theta}_i$
- DSIC 要求：不管别人怎么报告，如实报告都是最优

Bayesian 激励相容 BIC

- DSIC 很强：要求对任意 θ_{-i} 都成立
- 有时只要求在信念下诚实报告最优
- Bayesian IC 要求：

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}|\theta_i}\left[v_i(x(\theta_i,\theta_{-i});\theta_i)-p_i(\theta_i,\theta_{-i})\right]\geq\mathbb{E}_{\theta_{-i}|\theta_i}\left[v_i(x(\hat{\theta}_i,\theta_{-i});\theta_i)-p_i(\hat{\theta}_i,\theta_{-i})\right]$$

区别

DSIC 不依赖对别人类型的概率判断；BIC 依赖类型分布和条件信念。

参与约束

- 机制还要让参与者愿意参加
- 如果不参加机制，参与者 i 的保留效用是 $\bar{u}_i(\theta_i)$
- 参与约束要求：

$$v_i(x(\theta_i, \theta_{-i}); \theta_i) - p_i(\theta_i, \theta_{-i}) \geq \bar{u}_i(\theta_i)$$

- 在 Bayesian 版本中，也可以写成期望效用形式

含义

激励相容解决“会不会说真话”；参与约束解决“愿不愿意进来”。

显示原理 Revelation Principle

命题

如果某个结果函数可以由某个机制在某个均衡概念下实现，那么存在一个直接机制，在同一均衡概念下通过如实报告实现同一个结果函数。

- 原来要研究所有可能的机制：

$$(M_1, \ldots, M_n, x, p)$$

- 显示原理：可以转而研究直接机制

$$M_i = \Theta_i$$

- 于是机制设计问题变成：

$$\max_{x,p} \text{ 目标函数} \quad \text{s.t. IC, IR, feasibility}$$

- 显示原理不是说现实机制都简单，而是说在分析均衡可实现结果时，直接机制不损失一般性。

显示原理：构造

- 给定一个原机制：

$$\Gamma = (M_1, \ldots, M_n, x, p)$$

- 类型为 θ_i 的参与者在原机制中的均衡策略是

$$s_i^*(\theta_i) \in M_i$$

- 原机制在均衡中实现的结果函数是

$$f(\theta) = \big(x(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_n^*(\theta_n)), p(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_n^*(\theta_n))\big)$$

- 构造直接机制：参与者报告类型 $\hat{\theta}_i$
- 直接机制把报告类型转化为原机制中的均衡消息：

$$\hat{\theta}_i \mapsto s_i^*(\hat{\theta}_i)$$

显示原理：直接机制如何复制结果

- 直接机制的配置规则定义为

$$\tilde{x}(\hat{\theta}) = x\big(s_1^*(\hat{\theta}_1), \ldots, s_n^*(\hat{\theta}_n)\big)$$

- 支付规则定义为

$$\tilde{p}_i(\hat{\theta}) = p_i\big(s_1^*(\hat{\theta}_1), \ldots, s_n^*(\hat{\theta}_n)\big)$$

- 如果所有人如实报告 $\hat{\theta}_i = \theta_i$，则

$$(\tilde{x}(\theta), \tilde{p}(\theta)) = (x(s^*(\theta)), p(s^*(\theta)))$$

- 因而直接机制复制了原机制的均衡结果

含义

原机制中的均衡策略函数 $s_i^*(\cdot)$ 被直接机制吸收到规则里。

显示原理：为什么如实报告

- 若真实类型是 θ_i，如实报告触发

$$s_i^*(\theta_i)$$

- 若误报为 $\hat{\theta}_i$，则触发

$$s_i^*(\hat{\theta}_i)$$

- 但在原机制中，$s_i^*(\theta_i)$ 已经是类型 θ_i 的均衡最优策略
- 所以类型 θ_i 没有理由通过误报去诱导机制执行 $s_i^*(\hat{\theta}_i)$

结论

直接机制中的“如实报告”复制的是原机制中该类型的均衡行动。等价性发生在均衡结果上，不是发生在全部博弈过程上。

显示原理的真正作用

- 不使用显示原理时，机制设计者要同时选择：

$$M_i, \quad g(m), \quad p_i(m)$$

  并分析参与者的均衡策略

$$s_i^* : \Theta_i \to M_i$$

- 显示原理说：只要关心均衡结果，可以直接研究

$$x : \Theta \to X, \qquad p_i : \Theta \to \mathbb{R}$$

- 策略性行为被压缩进激励相容约束：

$$u_i(x(\theta_i, \theta_{-i}), p_i(\theta_i, \theta_{-i}); \theta_i) \geq u_i(x(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), p_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}); \theta_i)$$

含义

复杂的“规则 + 策略 + 均衡”问题，变成了“结果函数 + IC/IR 约束”的优化问题。

显示原理的条件与边界

- 必须先固定均衡概念：

$$\text{dominant strategy, Bayesian Nash, Nash, etc.}$$

- 不同均衡概念对应不同版本的显示原理
- 原机制必须已经在该均衡概念下实现某个结果函数

$$f : \Theta \to X \times \mathbb{R}^n$$

- 直接机制只保证：在同一均衡概念下，如实报告实现同一结果函数
- 它不说明现实机制简单，也不说明均衡唯一

方法论意义

显示原理把“研究所有可能规则”的问题，转化为“研究满足激励相容约束的直接机制”。

机制设计

例子

一价拍卖：基本环境

- 有 n 个风险中性的竞标者
- 每个竞标者的估值是私人信息：

$$v_i \sim U[0,1]$$

  且相互独立
- 每个人提交密封报价 b_i
- 最高报价者获胜，并支付自己的报价
- 若类型为 v_i 的竞标者报价 b_i 并获胜，效用为

$$v_i - b_i$$

注意

一价拍卖中，真实报价 $b_i = v_i$ 不是占优策略；竞标者会在“提高获胜概率”和“降低支付价格”之间权衡。

一价拍卖：对称 Bayesian Nash 均衡

- 设其他竞标者都采用单调报价函数 $b = \beta(v)$
- 类型为 v 的竞标者若假装成类型 z，则报价 $\beta(z)$
- 他的获胜概率是

$$\Pr(v_j < z,\ \forall j \neq i) = z^{n-1}$$

- 期望效用为

$$U(v, z) = \big(v - \beta(z)\big) z^{n-1}$$

- 均衡报价函数 $\beta(\cdot)$：如果所有其他人都按 $\beta(\cdot)$ 报价，那么类型为 v 的人也必须觉得 $\beta(v)$ 是自己最优的报价。
- 均衡要求 $z = v$ 最优：

$$\left.\frac{\partial U(v, z)}{\partial z}\right|_{z=v} = 0$$

- 解得

$$\beta(v) = \frac{n-1}{n} v$$

显示原理：把一价拍卖改写成直接机制

- 原机制中，消息是报价：

$$m_i = b_i$$

- 类型 v_i 的均衡策略是

$$s_i^*(v_i) = \beta(v_i) = \frac{n-1}{n} v_i$$

- 直接机制让参与者报告估值：

$$\hat{v}_i$$

- 机制内部把报告值转化为原机制中的均衡报价：

$$\hat{v}_i \mapsto \beta(\hat{v}_i)$$

- 然后把物品给最高 $\beta(\hat{v}_i)$ 的人，并让赢家支付 $\beta(\hat{v}_i)$

直接机制中为什么如实报告

- 真实估值为 v 的人若报告 z，机制让他报出原机制中的均衡报价

$$\beta(z)$$

- 他的期望效用是

$$\big(v-\beta(z)\big)z^{n-1}$$

- 这正是原一价拍卖中，类型 v 假装成类型 z 的期望效用
- 原机制的均衡已经说明 $z=v$ 最优
- 因此，直接机制中如实报告 v 是最优

结论

显示原理把“报价策略”吸收到机制规则中。参与者报告估值，机制替他执行原一价拍卖中的均衡报价。