用数学进行经济分析（一）

从边际效用到一般均衡

赵博

南开大学金融学院

2026 年 5 月 11 日

数学化的方式

核心问题

- 现实中的价值、选择、交换、市场秩序，如何被压缩成数学对象
- 变量选择：价格、数量、收入、偏好、禀赋
- 约束：预算、技术、资源、市场出清
- 均衡定义：个人最优与系统协调
- 数学化：删减现实细节，保留可推理结构

数学化微观理论的主线

阶段	数学对象	变化
Jevons	$MU = \frac{du}{dx}$	欲望强度被写成边际变化率
Walras	$z_i(p) = 0$	市场秩序变成联立方程
Pareto/Hicks	$x \succsim y, \quad U(x) \geq U(y)$	心理效用变成偏好排序
消费者理论	$\max U(x)\ \ s.t.\ \ p \cdot x \leq w$	选择变成约束最优化
需求理论	$x = x(p, w)$	行为变成价格和收入的函数
Arrow–Debreu	$\exists(p^*, x^*, y^*)$	均衡从直觉变成存在性证明

数学化的方式

Jevons

Jevons：把效用写成函数

- 设消费数量为 x，总效用为

$$u = u(x)$$

- 边际效用：

$$MU(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

- 边际效用递减：

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} < 0$$

Jevons：交换方程与等边际法则

- 设定：交易者 A 初始持有 a 单位 X；交易者 B 初始持有 b 单位 Y
- 交换后：A 持有 $(a-x)$ 单位 X 和 y 单位 Y；B 持有 x 单位 X 和 $(b-y)$ 单位 Y
- $\phi_{A或B}(\cdot)$：A（或 B）对 X 的边际效用（final degree of utility）
- $\psi_{A或B}(\cdot)$：A（或 B）对 Y 的边际效用；

A 均衡：多放弃 x 单位 X 的损失 = 换得 y 单位 Y 的增益

$$\phi_A(a-x)\cdot x=\psi_A(y)\cdot y$$

B 均衡：多获得 1 单位 X 的增益 = 放弃 Y 的损失

$$\phi_B(x)\cdot x=\psi_B(b-y)\cdot y$$

联立得交换方程：

$$\frac{\phi_A(a-x)}{\psi_A(y)}=\frac{y}{x}=\frac{\phi_B(x)}{\psi_B(b-y)}$$

左 = A 的主观交换比率；中 = 市场实际比率；右 = B 的主观交换比率。两个方程、两个未知数 (x,y)。

交换方程与等边际法则

- 多商品的等边际法则：

$$\frac{MU_x}{p_x} = \frac{MU_y}{p_y} = \frac{MU_z}{p_z} = \cdots = \lambda$$

- λ：收入的边际效用

Jevons 回应效用不可测量

- 未来心理学或许能测量
- 自己内心能判断就 OK，不需要测量（隐含着序数效用理论）

效用只能通过价格间接测量 $\rightarrow$ 循环论证?（用价格推导效用，再用效用解释价格）

Jevons 的困难

- 基数效用 $\rightarrow$ 人际效用比较无科学基础
- 独立效用假设 $U(x, y) = u_1(x) + u_2(y)$，没有互补性
- Marshall：忽略了成本在价格形成中的作用

边际效用递减：直觉与数学

形式	表述	假设
用途排序	高阶用途先满足，低阶用途后满足	人对物的用途有满足度排序
序数偏好	$x \succsim y$，$x \sim y$	可排序，不要求测量强度
微积分表达	$MU = \frac{du}{dx}$，$u''(x) < 0$	需要连续、可导、可分割

- 边际效用递减本身可以来自反躬自省或 Menger 式用途排序
- 可导效用函数是为了进入微积分、最优化和价格理论
- 数学表达强于原始直觉

Menger 与 Jevons

	Menger	Jevons
出发点	用途的重要性排序	心理效用的数量变化
边际含义	下一单位满足较低阶用途	效用函数的导数
数学要求	离散排序即可	连续、可微、可分割
优势	现实感强，较少形式假设	可计算、可嵌入均衡系统
代价	难以进入统一数学系统	将现实评价光滑化

数学化的方式

Walras

Walras (1874)：一般均衡（General Equilibrium）

- 核心问题：是否存在一组价格，使得**所有市场同时出清**?
- 雄心：将整个经济描述为数学系统——类似物理学
- 策略：联立方程组，方程数 $=$ 未知数 $\Rightarrow$ 解存在

纯交换经济的方程计数

- n 种商品，m 个消费者，市场出清：

$$D_i(p_1, \ldots, p_n) = S_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

- Walras 定律：$\sum_i p_i[D_i(p) - S_i] = 0 \Rightarrow$ 独立方程仅 $(n-1)$ 个
- 计价物标准化 $p_1 = 1 \Rightarrow$ 未知数仅 $(n-1)$ 个
- Walras 结论：$(n-1)$ 个方程，$(n-1)$ 个未知数 $\Rightarrow$ 解存在且唯一

生产经济的方程系统

方程类型	数量	未知数类型
产品需求方程	m	产品数量 (m)
要素供给方程	n	要素数量 (n)
要素市场均衡	n	产品价格 (m)
价格–成本等式	m	要素价格 (n)
总计	$2m+2n$	$2m+2n$

经 Walras 定律和计价物调整后：方程数 $=$ 未知数

Walras 的错误：必要但不充分

- 方程数 $=$ 未知数 $\Rightarrow$ 有解？**不一定。**仅必要条件。
- 矛盾方程：$x + y = 1$, $x + y = 2$
- 无实数解：$x^2 + y^2 = -1$
- 解为负：数学解存在，但价格为负——经济学上无意义

Walras 的困难：拍卖者

- tâtonnement：拍卖者喊价，观察超额需求 $z_i = D_i - S_i$
- $z_i > 0$ 提价，$z_i < 0$ 降价，直至 $z_i = 0$
- Pareto (1896)：Walras 混淆了这**一求解装置与现实中的均衡决定过程**
- 真实市场中，非均衡价格下交易已发生 $\rightarrow$ 禀赋改变 $\rightarrow$ 均衡本身改变
- 回忆：Lange vs. Mises, Hayek。人类对模型和现实之间差距的认识让人惊讶（现代也依然如此）：
  - Robert Lucas (2003): "central problem of depression prevention has been solved, for all practical purposes, and has in fact been solved for many decades."
  - "The 2008 financial crash and ensuing "Great Recession" revealed that economists actually knew far less about the world than they thought they knew. It suddenly became painfully clear that a large part of the profession was virtually clueless what was actually going on in the economy because few of the ugly real world complexities are captured in our oversimplified mathematical models." —John Rust (2016)

Walras 的错误：收敛性不保证

- 均衡存在 $\neq$ tâtonnement 收敛到均衡
- Scarf (1960) 反例：三商品经济中 tâtonnement 产生闭合轨道，永不收敛
- 存在性 $\neq$ 可达性 $\neq$ 稳定性

后续的改进

- 严格存在性证明需不动点定理（Brouwer 1911; Kakutani 1941）
- Walras 写于 1874 年——这些数学工具尚不存在
- Pareto (1896) 已指出其混淆算法与现实的错误

数学化的方式

序数效用

Pareto 的转向：从基数到序数

- 基数效用要求回答：

$$U(x) - U(y) \quad \text{有多大?}$$

- 序数效用只要求回答：

$$x \succsim y, \quad y \succsim x, \quad x \sim y$$

- 效用值不重要，排序重要

变化

从“测量快乐”转向“表示选择顺序”。

偏好关系：最小的数学对象

- 消费集：

$$X \subseteq \mathbb{R}_+^L$$

- 偏好关系：

$$\succsim \subseteq X \times X$$

- 含义：

$$x \succsim y \quad \text{表示} x \text{ 至少和} y \text{ 一样好}$$

- 派生关系：

$$x \succ y \iff x \succsim y \text{ 且非} y \succsim x$$

$$x \sim y \iff x \succsim y \text{ 且} y \succsim x$$

无差异曲线：偏好排序的等高线

- 序数效用只保留排序：

$$x \succsim y \iff U(x) \geq U(y)$$

- 同一偏好等级上的消费束构成无差异集合：

$$I(\bar{U}) = \{x \in X : U(x) = \bar{U}\}$$

- 两商品情形下：

$$U(x_1, x_2) = \bar{U}$$

- 含义：曲线上所有点都一样好

$$(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2')$$

边际替代率：无差异曲线的斜率

- 沿着同一条无差异曲线移动，效用不变：

$$dU = 0$$

- 对两商品：

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

- 整理得到：

$$MRS_{12} = -\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{U=\bar{U}} = \frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}$$

- 含义：为了多得到 1 单位商品 1，愿意放弃多少商品 2

预算线：市场给出的交换率

- 预算约束：

$$p_1x_1 + p_2x_2 = w$$

- 写成斜率形式：

$$x_2 = \frac{w}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

- 预算线斜率：

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{budget} = -\frac{p_1}{p_2}$$

- 含义：多买 1 单位商品 1，必须少买 $\frac{p_1}{p_2}$ 单位商品 2

消费者均衡：主观交换率等于市场交换率

- 主观的交换意愿

$$MRS_{12} = \frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2}$$

- 市场给出的交换率

$$\frac{p_1}{p_2}$$

- 市场要求的交换率和主观的交换率匹配:

$$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

小结

- Jevons (1871)：基数效用 $+$ 微积分 $\rightarrow$ 边际分析
- Walras (1874)：联立方程 $\rightarrow$ 一般均衡（方程计数法有缺陷）
- Pareto ($\sim$1900)：序数效用 $+$ 无差异曲线

公理化构建

偏好公理：把“理性”写成关系性质

完备性

$$\forall x, y \in X, \quad x \succsim y \text{ or } y \succsim x$$

传递性

$$x \succsim y, \; y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$$

连续性

$$x_n \rightarrow x, \; y_n \rightarrow y, \; x_n \succsim y_n \; \forall n \Rightarrow x \succsim y$$

现实中的偏好可能违反公理

公理	现实中的可能违反
完备性	面对完全不熟悉、维度复杂或后果难以想象的选项，个体可能无法判断哪一个至少一样好。例：职业选择、重大医疗方案、复杂金融产品。
传递性	刚好可察觉差异可能导致非传递性。例：渐变颜色中，A 与 B 太相似而无差异，B 与 C 也无差异，但 A 和 C 放在一起时可以区分，因而 $A \succ C$。
连续性	字典序偏好违反连续性：先比较商品 1，只有商品 1 相等时才比较商品 2。某些安全、伦理或底线选择也可能不允许任意小补偿，例如风险超过阈值后完全不可接受。

注意

偏好是静态的。没有时间进入。后续有拓展

效用表示定理

基本形式

若 $\succsim$ 满足完备性、传递性、连续性，则存在连续函数

$$U : X \to \mathbb{R}$$

使得

$$x \succsim y \iff U(x) \geq U(y)$$

非唯一性

若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 严格递增，则

$$V(x) = f(U(x))$$

代表同一偏好。

单调性与凸性：经济含义进入形式结构

单调性 / 非餍足性

$$x \geq y,\ x \neq y \Rightarrow x \succ y$$

凸性

$$x \succsim z,\ y \succsim z \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \succsim z, \quad \alpha \in [0,1]$$

严格凸性

$$x \neq y,\ x \succsim z,\ y \succsim z \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \succ z$$

为什么还要加单调性与凸性

条件	数学含义	作用
完备性、传递性、连续性	偏好可由效用函数表示	得到 $U(x)$
单调性 / 非餍足性	更多商品更好	最优点在预算线上：$p \cdot x = w$; 福利定理中支持“没有可改进机会”的论证
凸性	平均组合不比极端差	最优选择集合性质良好,效用函数拟凹；帮助需求和均衡存在性证明
严格凸性	平均组合严格更好	最优选择通常唯一，需求成为函数（而不是 correspondence）

公理化构建

数学的优点：概念讨论的清晰化

例 1：从马歇尔需求函数 Marshallian demand 出发的讨论

消费者面对价格向量

$$p = (p_1, \ldots, p_L)$$

和收入

$$w > 0.$$

他选择消费束

$$x = (x_1, \ldots, x_L) \in \mathbb{R}^L_+.$$

预算约束是：

$$p \cdot x \leq w.$$

Marshallian demand 定义为：

$$x(p, w) \in \arg\max_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{U(x) : p \cdot x \leq w\}.$$

也就是：在买得起的消费束里，选择效用最高的那个。

Marshallian demand 的两个基本性质

零次齐次性

如果所有价格和收入同比例变化：

$$(p, w) \mapsto (\alpha p, \alpha w), \qquad \alpha > 0,$$

预算集合不变：

$$\{x : p \cdot x \leq w\} = \{x : \alpha p \cdot x \leq \alpha w\}.$$

所以：

$$x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w).$$

预算约束紧束

如果偏好局部非餍足，消费者不会留下没花掉的购买力：

$$p \cdot x(p, w) = w.$$

间接效用函数：给定价格和收入，最高能达到什么效用

Marshallian demand 问：

买什么?

间接效用函数问：

在价格p 和收入w 下，最高能达到多少效用?

定义：

$$v(p,w) = \max_{x\in\mathbb{R}^L_+} \{U(x) : p\cdot x \le w\}.$$

如果最优选择是 $x(p,w)$，那么：

$$v(p,w) = U(x(p,w)).$$

所以：

$x(p,w)$ 是选择，

$v(p,w)$ 是这个选择带来的最高效用。

Roy's identity：从间接效用找回需求

间接效用函数：

$$v(p, w)$$

记录价格和收入如何影响最高可达效用。
如果 v 可微，则 Marshallian demand 可以由 v 的导数恢复：

$$x_i(p, w) = -\frac{\partial v(p, w)/\partial p_i}{\partial v(p, w)/\partial w}.$$

这叫 Roy's identity。
直觉：

$$\frac{\partial v}{\partial p_i}$$

表示第 i 个商品涨价对效用的损失；

$$\frac{\partial v}{\partial w}$$

表示多一单位收入带来的效用收益。
两者相除，把"效用损失"换算成"收入单位"，得到对商品 i 的需求量。

Roy's identity：包络定理

消费者问题：

$$v(p,w)=\max_{x} u(x) \quad \text{s.t.} \quad p\cdot x\le w.$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x,\lambda;p,w)=u(x)+\lambda(w-p\cdot x).$$

最优值函数：

$$v(p,w)=\mathcal{L}(x^*,\lambda^*;p,w).$$

对 w 求导：

$$\frac{\partial v}{\partial w}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\frac{dx^*}{dw}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\frac{d\lambda^*}{dw}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w}.$$

包络定理：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}=0,$$

因此只有直接效应保留：

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial w}=\lambda}$$

即拉格朗日乘子等于收入的边际效用。

Roy's identity：恢复 Marshallian demand

继续对价格 p_i 求导：

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}.$$

由于：

$$\mathcal{L} = u(x) + \lambda(w - p \cdot x),$$

所以：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = -\lambda x_i.$$

因此：

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = -\lambda x_i.$$

又因为：

$$\frac{\partial v}{\partial w} = \lambda,$$

代入得：

$$\boxed{x_i(p, w) = -\frac{\partial v(p, w)/\partial p_i}{\partial v(p, w)/\partial w}}$$

这就是 Roy's identity。

支出函数：达到某个效用最少要花多少钱

Marshallian problem 是：

$$\max U(x) \quad s.t. \quad p \cdot x \leq w.$$

支出最小化问题反过来问：
给定目标效用 $\bar{u}$，最少要花多少钱?

$$e(p, \bar{u}) = \min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x : U(x) \geq \bar{u}\}.$$

对应的最优消费束叫 Hicksian demand：

$$h(p, \bar{u}) \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^L_+} \{p \cdot x : U(x) \geq \bar{u}\}.$$

区别：

$$x(p, w) : \text{给定收入，效用最大化}$$

$$h(p, \bar{u}) : \text{给定效用，支出最小化}$$

Shephard's lemma：从支出函数找回 Hicksian 需求

支出函数：

$$e(p, \bar{u})$$

表示在价格 p 下达到效用 $\bar{u}$ 的最低成本。
如果 e 可微，则：

$$h_i(p, \bar{u}) = \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i}.$$

这叫 Shephard's lemma。
直觉：
如果第 i 个商品价格上升一点点，最低支出会增加多少?
答案取决于补偿需求中用了多少第 i 个商品：

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = h_i.$$

Shephard's lemma（1）

支出最小化问题：

$$e(p, \bar{u}) = \min_{x} \; p \cdot x \quad \text{s.t.} \quad U(x) \geq \bar{u}.$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x, \lambda; p, \bar{u}) = p \cdot x + \lambda(\bar{u} - U(x)).$$

最优值函数：

$$e(p, \bar{u}) = \mathcal{L}(x^*, \lambda^*; p, \bar{u}).$$

对价格 p_i 求导：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial p_i} &= \frac{d}{dp_i}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*; p, \bar{u}) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\frac{\partial x^*}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}.
\end{aligned}$$

Shephard's lemma（2）

包络定理（一阶条件）：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

因此：

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}.$$

计算该项：

$$\mathcal{L} = p \cdot x + \lambda(\bar{u} - U(x)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = x_i.$$

而 x_i 是 Hicksian demand：

$$x_i = h_i(p, \bar{u}).$$

得到：

$$\boxed{\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u})}$$

这就是 Shephard's lemma。

Marshallian 需求与 Hicksian 需求的区别

	Marshallian demand	Hicksian demand
问题	给定收入，效用最大化	给定效用，支出最小化
记号	$x(p, w)$	$h(p, \bar{u})$
收入/效用	收入 w 固定	效用 $\bar{u}$ 固定
价格变化时	实际购买力会变	补偿收入变化，使效用不变
包含效应	替代效应 + 收入效应	只有替代效应

价格变化为什么有两种效应

假设商品 j 价格上升。
对商品 i 的 Marshallian demand：

$$x_i(p, w)$$

会变化。
这个变化有两部分：

替代效应

商品 j 相对变贵，消费者倾向于用其他商品替代它。
这个效应由 Hicksian demand 捕捉，因为 Hicksian demand 保持效用不变：

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}.$$

收入效应

价格上升使同样收入能买到的东西变少，实际购买力下降。
这个效应取决于需求对收入的反应：

$$\frac{\partial x_i}{\partial w}.$$

Slutsky 方程

Slutsky 方程把 Marshallian 需求的价格效应拆成两部分：

$$\frac{\partial x_i(p, w)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j(p, w)\frac{\partial x_i(p, w)}{\partial w},$$

其中

$$\bar{u} = v(p, w).$$

左边是总价格效应：

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}.$$

右边第一项是替代效应：

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j}.$$

右边第二项是收入效应：

$$-x_j\frac{\partial x_i}{\partial w}.$$

Slutsky 方程的直觉

当 p_j 上升一点点：

$$dp_j > 0.$$

消费者原来购买 x_j 单位商品 j。
为了让他还能买得起原来的消费束，需要补偿收入：

$$x_j \, dp_j.$$

如果不补偿，这部分购买力损失会影响需求。
所以收入效应是：

$$-x_j \frac{\partial x_i}{\partial w}.$$

因此：

$$\text{总效应} = \text{替代效应} + \text{收入效应}.$$

即：

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial w}.$$

Slutsky equation（1）

恒等式：

$$x_i(p, w) = h_i\big(p, v(p, w)\big)$$

对 p_j 求导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i(p, w)}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j} h_i\big(p, v(p, w)\big) \\ &= \frac{\partial h_i}{\partial p_j} + \frac{\partial h_i}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial v}{\partial p_j}.\end{aligned}$$

Roy's identity：

$$\frac{\partial v}{\partial p_j} = -x_j(p, w)\frac{\partial v}{\partial w}.$$

代入：

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial h_i}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial w}.$$

Slutsky equation（2）

恒等式（duality）:

$$\frac{\partial h_i(p,\bar{u})}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial v(p,w)}{\partial w} = \frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w}.$$

代入上一页结果:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial w}.$$

最终得到 Slutsky 方程:

$$\boxed{\frac{\partial x_i(p,w)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p,\bar{u})}{\partial p_j} - x_j(p,w)\frac{\partial x_i(p,w)}{\partial w}}$$

其中 $\bar{u} = v(p,w)$。

三组对象的关系

对象	定义	找回需求
Marshallian demand	$x(p, w)$ 给定收入最大化效用	直接来自 primal problem
Indirect utility	$v(p, w)$ 最高可达效用	Roy's identity: $$x_i = -\frac{v_{p_i}}{v_w}$$
Expenditure function	$e(p, \bar{u})$ 达到效用的最低成本	Shephard's lemma: $$h_i = e_{p_i}$$

公理化构建

能否完全抛开效用，只看选择?

显示偏好：数据是什么

我们观察到有限个选择：

$$\{(p^t, x^t)\}_{t=1}^T.$$

其中：

$$p^t = (p_1^t, \ldots, p_n^t)$$

是在第 t 次观察中的价格向量，

$$x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$$

是在第 t 次观察中实际选择的消费束。
预算约束是：

$$p^t \cdot x \leq p^t \cdot x^t.$$

也就是说，在第 t 次选择中，所有满足上式的 x 当时都买得起。

直接显示偏好

直接显示偏好

如果在价格 p^t 下，消费者选择了 x^t，而 x^s 当时也买得起：

$$p^t \cdot x^s \leq p^t \cdot x^t,$$

那么说：

$$x^t \succeq^D x^s.$$

读作：x^t 直接显示偏好于 x^s。

严格直接显示偏好

如果 x^s 当时严格买得起：

$$p^t \cdot x^s < p^t \cdot x^t,$$

那么说：

$$x^t \succ^D x^s.$$

WARP：两两选择不能互相打脸

WARP：Weak Axiom of Revealed Preference

如果 x^t 直接显示偏好于 x^s，并且两者不是同一个消费束：

$$x^t \succeq^D x^s, \qquad x^t \neq x^s,$$

那么不能反过来让 x^s 也直接显示偏好于 x^t。
用价格写就是：

$$p^t \cdot x^s \leq p^t \cdot x^t, \quad x^t \neq x^s \Rightarrow p^s \cdot x^t > p^s \cdot x^s.$$

含义

第 t 次选择说明：在 x^t 和 x^s 都可选时，消费者选了 x^t。
因此第 s 次选择不能又说明：在 x^s 和 x^t 都可选时，消费者选了 x^s。

GARP：排除一串选择形成的循环

间接显示偏好

如果存在一条链：

$$x^t \succeq^D x^{k_1}, \quad x^{k_1} \succeq^D x^{k_2}, \quad \dots \quad x^{k_m} \succeq^D x^s,$$

那么说：

$$x^t \succeq^R x^s.$$

读作：x^t 间接显示偏好于 x^s。

GARP：Generalized Axiom of Revealed Preference

如果

$$x^t \succeq^R x^s,$$

那么不能同时有

$$x^s \succ^D x^t.$$

等价地说：

$$x^t \succeq^R x^s \Rightarrow p^s \cdot x^t \geq p^s \cdot x^s.$$

建模思路

- 标准消费者理论的方向：

$$\text{偏好}\ \succsim \Rightarrow \text{效用函数}\, U(x) \Rightarrow \text{效用最大化} \Rightarrow \text{需求}\, x(p, w)$$

- 显示偏好反过来：

$$\text{观察到的选择}(p^t, x^t) \Rightarrow \text{选择一致性} \Rightarrow \text{是否存在偏好/效用函数 rationalize}$$

- 目标：不从不可观察的效用或无差异曲线出发，而从可观察选择出发
- 历史意义：消费者理论的操作主义版本
- 结果：原本试图摆脱效用函数，最后又通过 Afriat 定理把效用函数重构回来（GARP $\iff$ 存在连续、单调、凹的效用函数 rationalize 数据）

一般均衡：把市场写成系统

从消费者到市场

- 局部分析问：

  一个市场的价格和数量如何决定?

- 一般均衡问：

  所有市场能否在同一组价格下同时协调?

- 关键不是多写几个市场，而是把整个经济看作一个联立系统

变化

价格不再只是某个市场的结果，而是协调所有偏好的信号向量。

纯交换经济：个体问题

- I 个消费者，L 种商品
- 消费者 i 的禀赋：

$$\omega_i \in \mathbb{R}_+^L$$

- 总禀赋：

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

- 消费者 i 面对价格 p 的问题：

$$x_i(p) \in \arg\max_{x_i \in X_i} U_i(x_i) \quad s.t. \quad p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i$$

超额需求函数

个体净需求

$$x_i(p) - \omega_i$$

市场超额需求

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

$$z_\ell(p) = \sum_{i=1}^{I} x_{i\ell}(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega_{i\ell}, \quad \ell = 1, \ldots, L$$

现实中的“这个市场缺货、那个市场过剩”被写成一个向量函数。

Walras 均衡

市场出清

$$z(p^*) = 0$$

也就是

$$\sum_{i=1}^{I} x_i(p^*) = \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

若允许商品免费丢弃/闲置/不使用

$$z(p^*) \le 0, \qquad p^* \cdot z(p^*) = 0$$

- 每个人在价格下最优
- 所有人的计划加总后刚好可行
- 没有人负责协调，但价格向量完成协调

Walras 定律与价格齐次性

Walras 定律

$$p \cdot z(p) = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell z_\ell(p) = 0$$

零次齐次性

$$z(\alpha p) = z(p), \quad \alpha > 0$$

- 若前 $L-1$ 个市场出清，最后一个市场自动出清
- 只有相对价格重要，可以选一个计价物：

$$p_1 = 1$$

Arrow–Debreu：形式化的高峰与困境

Arrow–Debreu 模型：基本对象

- 商品空间：

$$\mathbb{R}^L$$

- 消费者：

$$(X_i, \succsim_i, \omega_i), \quad i = 1, \ldots, I$$

- 企业：

$$Y_j \subseteq \mathbb{R}^L, \quad j = 1, \ldots, J$$

- 价格：

$$p \in \mathbb{R}^L_+$$

数学化处理

经济中的人、商品、技术、产权、时间和不确定性，都被装进同一个商品空间和可行集合。

消费者、企业与市场出清

消费者最优

$$x_i^* \in \arg\max_{x_i \in X_i} U_i(x_i)$$

$$s.t. \quad p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$$

企业利润最大化

$$y_j^* \in \arg\max_{y_j \in Y_j} p^* \cdot y_j$$

市场出清

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} y_j^*$$

Arrow–Debreu 均衡

竞争均衡

一组价格、消费计划和生产计划

$$(p^*, x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*)$$

构成竞争均衡，如果：

1. 每个消费者在预算约束下最优
2. 每个企业在技术集合中利润最大化
3. 所有市场同时出清

存在性命题

在连续性、凸性、局部非餍足、技术集合凸性等条件下，存在竞争均衡。

$$\exists (p^*, x^*, y^*)$$

从方程思维到不动点思维

- Walras 的问题：

$$z(p) = 0$$

- 现代证明思路：构造一个从价格单纯形（价格向量做一个归一化，让它落在一个紧致集合（compact, closed and bounded）里）到自身的映射

$$T : \Delta \to \Delta$$

- 用不动点定理：

$$p^* \in T(p^*)$$

- 再说明这个不动点对应市场出清

变化

一般均衡从“解一组方程”的想象，变成“证明一个映射有不动点”的数学问题。

福利定理

Pareto 有效

配置 x 是 Pareto efficient，如果不存在另一个可行配置 x'，使得

$$x'_i \succsim_i x_i \quad \forall i$$

且至少对某个 k：

$$x'_k \succ_k x_k$$

第一福利定理

$$\text{Competitive Equilibrium} \Rightarrow \text{Pareto Efficient}$$

第二福利定理

在凸性等条件下，任意 Pareto 有效配置可由适当初始禀赋再分配后作为竞争均衡实现。

这套世界切掉了什么

- 交易发生前，价格已经给定并完成协调
- 个体是价格接受者，不需要考虑他人的策略行动
- 信息问题、合同执行、谈判权力、组织内部结构都被放到模型外
- 时间和不确定性可以被写成“状态商品”：

$$x_{\ell,t,s}$$

- 但这种写法要求未来状态和商品空间事先可列出（这和偏好可以变化不是一回事）

界限

这不是一个现实市场的全景图，而是一个高度净化的基准世界。

Sonnenschein-Mantel-Debreu theorem

基本意思

设总超额需求函数为

$$z(p) = (z_1(p), z_2(p), \ldots, z_n(p)),$$

其中 $z_i(p)$ 表示在价格向量 p 下第 i 个市场的超额需求。
SMD 定理的大意是：只要 $z(p)$ 满足一些基本限制，例如连续性、零次齐次性，以及 Walras 法则

$$p \cdot z(p) = p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) + \cdots + p_n z_n(p) = 0,$$

那么总超额需求函数在这些限制之外几乎可以有任意形状。

$$z(p) \text{ can be almost arbitrary.}$$

SMD 定理的含义

- 从微观理性不能自动推出宏观稳定性（不能保证单调性：价格上升，需求下降）
- 均衡可能不唯一（$z(p) = 0$ 只有一个解）
- 均衡可能不稳定（不能保证：如果某商品超额需求为正，价格上升；超额需求为负，价格下降，最后能收敛到均衡。）
- 比较静态分析不一定有清楚方向（不能保证：参数变化后，均衡价格和配置有明确方向。例如收入上升、利率下降、技术变化，会带来可预测结果）
- “代表性消费者”可能会掩盖真实的加总问题

SMD 的含义

- SMD 定理没有否定 GE 的“存在性结果”
- 否定了：只要个体理性、市场竞争，整个市场系统就自然会有唯一、稳定、可预测的均衡。

小结：从偏好假设到一般均衡

理论步骤	需要这些假设做什么
效用表示	完备性、传递性、连续性使偏好可以写成 $U(x)$。
消费者问题	单调性使预算约束紧束；凸性使最优选择集合规整。
需求理论	连续性和凸性帮助需求有良好性质；严格凸性帮助需求唯一。
一般均衡存在	连续性、凸性、紧性等条件帮助用不动点定理证明均衡存在。
福利定理	局部非餍足性排除“还有人可无成本变好”的情况；凸性支持第二福利定理中的分离论证。

General Equilibrium 的历史位置

完成了什么	把价值、选择、交换和资源配置统一到一个数学系统中
证明了什么	在严格条件下，竞争均衡可以存在，并与 Pareto 效率相连
牺牲了什么	策略、信息、合同、制度、历史时间、组织和执行问题

策略、信息、合同和制度，成为后续微观理论的入口。

一般均衡实际证明了什么

目标	分散优化 + 价格系统 $\Rightarrow$ 市场协调 + Pareto 效率
实际结果	在强条件下，竞争均衡存在；在附加条件下，有福利定理
没有证明	现实市场总有效；市场过程会收敛；均衡唯一；制度和信息问题不重要
SMD 之后	个体理性不推出漂亮、稳定、唯一、可预测的总体需求

换句话说：

- 市场也可能达到有效配置；政府干预当然也可以达到，甚至可以直接选某个他想要的有效配置
- 第二福利定理的“初始禀赋配置”意味着：需要某种外部力量先改分配
- 因此，证明的过程从纯数学的意义上来理解，是一个充分性证明，而不是必要性证明。也就是说，市场是一个效率和福利的充分性条件，不是必要性条件。这和一般人认为的，市场是效率的必要性条件，不是同一个意思。

小结：数学化带来了什么

现实到数学的压缩

现实问题	数学压缩	得到的能力
欲望强弱	$U(x)$, MU_i	比较边际取舍
选择一致性	$\succsim$, $U(x)$	用函数代表偏好
资源有限	$p \cdot x \leq w$	写成约束最优化
价格变化	Slutsky 方程	拆分机制
多市场联动	$z(p) = 0$	定义同时协调
效率判断	Pareto efficient	将均衡与福利相连

数理模型的使用边界

用法	可以做什么	主要风险
概念澄清	定义均衡、效率、激励、约束	把定义当现实
机制展示	说明一个因果通道如何可能成立	把可能机制当主导机制
比较静态	分析小变化的方向	依赖局部和其他条件稳定
数量预测	预测需求、价格、产出、政策效果	需要经验校准和环境稳定
制度设计	设计拍卖、匹配、合同、规则	信息、激励、执行被低估

长程推导的风险

- 初始理想化在推导过程中被遗忘
- 模型世界中的定理，被误读为现实世界的制度结论
- 被删掉的东西，可能正是问题的核心
- 假设是否“像现实”不是唯一标准；承重假设是否切中问题更重要

典型错误

- 用均衡条件替代现实过程
- 用可计算性替代可执行性
- 用形式一致性替代制度可行性

Friedman、Coase、Mises/Hayek

立场	关注点	对模型的要求
Friedman	假设是否现实不重要，关键看预测	as-if 预测能力
Coase	真实制度、交易成本、产权安排	机制必须落在现实制度中
Mises/Hayek	知识分散、价格发现、调整过程	价格不能只作为方程解出现
Lange 式问题	均衡条件形式上漂亮	忽略信息生成和执行过程

小结：数学化带来了什么

“无用”的一般均衡理论

先有十环，再有靶子

物理学

有一个核心的重要的问题 ==>

想办法用最简单的框架（Occam's scissor）来建模 ==>

不仅仅可以解释已有的现象，同时可以给出新的可检验的预测

- 牛顿：天上运动与地上运动能否统一。电磁学、相对论……类似

一般均衡

圆心已经标好（分散市场通过价格机制自我协调）==>

构造使这个圆心成立的数学体系

GE 之后的主流经济学

- 实证研究：大量转向 partial equilibrium 与局部识别
- 应用微观：具体市场、具体制度、具体政策冲击
- 理论微观：contract，information，mechanism design
- 特征：放弃统一总体系统，转向局部结构
    - GE 并未消失
- 原因：GE 条件一放松，宏大结论难以维持
- 现状：经济学研究并未延续这套公理化体系，逐渐松散

数学化的收益与代价

收益

- 从语言推理进入明确的对象、约束、均衡和定理
- 概念的逻辑一致性可以被检查
- 给后来的计量、机制设计和政策分析提供共同语言

代价

- 现实被压缩后，很多重要问题暂时消失
- General Equilibrium 越纯粹，越难容纳策略、信息、合同和制度
- 后续微观理论：把策略、信息、合同、制度重新放回数学模型

模型成为一种 Benchmark

《经济学、经济学家与经济学教育》

- 阿罗—德布鲁：经济体制 $\not\Leftrightarrow$ 经济效益
- MM 定理：金融工具 $\not\Leftrightarrow$ 企业价值
- 科斯定理：产权初始配置 $\not\Leftrightarrow$ 配置效率
- 卢卡斯：货币政策 $\not\Leftrightarrow$ 长期真实产出
- 贝克尔—施蒂格勒：执法体制 $\not\Leftrightarrow$ 执法效率

参考文献 i

- Jevons, W. S. (1871). *The Theory of Political Economy*.
- Walras, L. (1874/1877). *Elements of Pure Economics*.
- Pareto, V. (1906). *Manual of Political Economy*.
- Hicks, J. R., & Allen, R. G. D. (1934). A Reconsideration of the Theory of Value.
- Hicks, J. R. (1939). *Value and Capital*.
- Samuelson, P. A. (1938). A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour.
- Arrow, K. J., & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.
- Debreu, G. (1959). *Theory of Value*.

参考文献 ii

Afriat, S. N. (1967). The Construction of Utility Functions from Expenditure Data.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*.